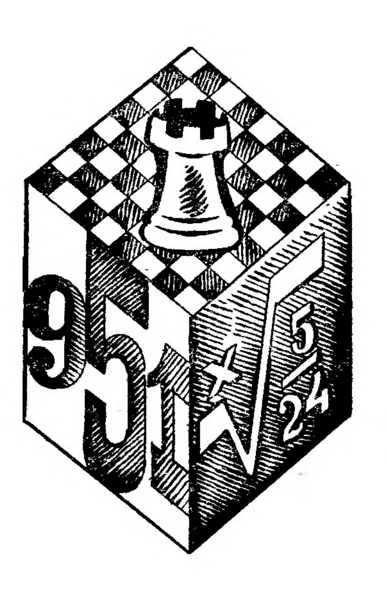
Л. М. ЛОПОВОК

МАТЕМАТИКА НА ДОСУГЕ

Л. М. ЛОПОВОК

МАТЕМАТИКА НА ДОСУГЕ

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
СРЕДНЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА
(IV—VIII КЛАССЫ)



МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1981

ББК 22.1
Л77

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук А. З. Хамишон (Ворошиловградский пединститут);
инспектор—методист МП РСФСР К. И. Шалимова.

Лоповок Л. М.

Л77 Математика на досуге: Кн. для учащихся сред. школьного возраста. — М.: Просвещение, 1981. — 158 с.

Данное пособие предназначено для учащихся IV—VIII классов, которые интересуются математикой. Оно содержит сказки и рассказы, в которых описываются события, имеющие прямую связь с математикой. Книга знакомит с методами рассуждения, показывает подход ко многим необычным и не очень легким задачам. В конце книги приводятся указания к решению предложенных задач.

Разнообразный материал книги может быть использован для разумного заполнения досуга школьников и для работы школьных математических кружков.

Л $\frac{60601-528}{103(03)-81}$ 262—80 4306020400 ББК 22.1

СЛОВО К ЧИТАТЕЛЯМ

Эта книга адресована юным читателям — и тем, кто недавно познакомился с математикой, и тем, кто уже познал радость знакомства с ее удивительными тайнами.

Это не учебник и не сборник задач. В книге не излагается последовательно и достаточно полно ни один раздел школьной программы. И все же здесь говорится о многих вопросах, близко стоящих к математическим проблемам, которые рассматривают в школе. Книга знакомит с методами рассуждения, показывает подход к многим необычным и не очень легким задачам. Все это сделано в такой форме, чтобы помочь разумно заполнить досуг.

Открывается книга несколькими сказками. Но не случайно они названы «сказками не без математики». Слова и поступки героев этих сказок и рассказов тесно связаны с математикой. Читая эти сказки, невольно задумываешься, как же пришли герои к своим решениям, на чем основаны их утверждения. Размышления о том, как Иван-молодец резал волшебные пироги или как гномы пытались сложить прямоугольник из фигур гексамино, достаточно интересны с математической точки зрения.

Читателей ожидают математические ребусы, в которых речь идет о восстановлении различных записей математических действий (сложения, умножения, деления, возведения в степень и извлечения квадратного корня), выполненных в обычной системе счисления. Степень трудности ребусов различна: есть посильные ученику IV класса, а есть и такие, для решения которых пригодятся опыт и подготовка, полученные в VII—VIII классах.

После математических ребусов читатели встретятся с набором необычных задач. Здесь десятки упражнений с цифрами, много нешаблонных (хотя часто не очень трудных) алгебраических и геометрических задач. Поскольку материал этих страниц («С алгеброй и без нее», «Знаете ли вы геометрию?») требует определенных математических знаний, там указано, для учащихся какого класса предназначена та или иная группа задач.

В главе «Вместо послесловия» автор беседует с читателями о предыдущих главах, обращает внимание на математические вопросы, возникающие при чтении текста, и дает некоторые указания к решению. Читать эту главу полезно и для сверки ответов, и для ознакомления с возможными путями решения задач. Но спешить заглядывать сюда не нужно. Самостоятельная работа приносит больше пользы, чем запоминание ответа или решения, приведенного в книге.

Занимательные задачи по математике публикуются уже много веков. Поэтому среди помещенных в этой книге найдутся и знакомые читателям. Однако большинство задач окажется для читателей новым материалом для математических раздумий.

Не все страницы книги читаются одинаково легко, но на каждой из них для юных любителей математики приготовлены математические неожиданности.

В этой книге отобран материал, доступный для учащихся IV—VIII классов. В тех случаях, когда указаний о подготовке учащихся нет, разобраться в содержании могут и учащиеся IV—V классов. «Сказки не без математики» понятны и доступны учащимся IV—VI классов. Только две последние требуют некоторых сведений из курса VII—VIII классов.

Автор надеется, что время, которое будет затрачено на чтение — не спеша, с бумагой и ручкой, — доставит читателям удовольствие и принесет им определенную пользу.

Исключительно велика роль математики в современной жизни, науке, производстве. Не забудем и мудрого изречения М. В. Ломоносова о том, что «математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит». Возможно, размышляя над страницами книги, кто-то из вас задумается о выборе своего жизненного пути и решит связать его с математикой.

Просим читателей присылать свои отзывы о книге, а также замечания и пожелания, направленные на ее улучшение.

СКАЗКИ НЕ БЕЗ МАТЕМАТИКИ



Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упускать возможности сделать его немного более занимательным.

Б. Паскаль

ЕДИНИЦА И НУЛЬ

I

На каждом шагу у нас числа: и номер дома, и номер трамвая, и число на календарном листке, и число на циферблате часов, и число на монете... А ведь любое число можно написать только с помощью цифр.

Вот нам и кажется, что все цифры трудятся сообща, помогают людям. Одним словом, дружная семья. А она и не всегда дружная. Вот и сегодня цифры перессорились.

Почему спор начался, никто и не помнил, но спорили с жаром. Самый тихий из всех Нуль пытался успокоить спорщиков, но его и слушать не стали.

— Ты-то зачем лезешь? — крикнула Единица.— Не вмешивайся в спор **значащих** цифр!

— Зря ты нос задираешь, — урезонивал ее Нуль, — я нужен не меньше, чем ты. Да если хочешь знать, все вы название из-за меня получили.

— Это как же?

— А так. Придумали меня индийцы и назвали **суниа**. А это значит — пустое. Арабы переняли у индийцев запись и перевели название на свой язык. Вот и назвали меня **ас-сифр**. Постепенно первая частица отпала. Так что цифрой называли сперва нуль. Это уж потом всех нас стали называть цифрами...

— Может быть, и так, — отрезала Единица, — а только все равно ты ничего не значишь. Так тебя и назвали: индийцы — пустое, арабы — ничто.

— Почему же ничего не значу? — обиделся Нуль. — Очень даже значу. Вот стану я за тобой, и сразу вместо единицы десяток появится!

— Подумаешь — десяток. Если за мной станет Девятка, так не десяток, а девятнадцать получится!

— Не хвастайся, — сказал Нуль, — ведь если я стану перед тобой да кликну свою знакомую Запятую... Станет она между нами, и что от твоего величия останется...

— Ну, если и Запятая, тогда дело другое. А так тебя числа вперед никогда не пускают. Потому ты в числах редко встречаешься.

— Выдумываешь ты все.

— А вот и не выдумываю. Давай посчитаем, какая цифра встречается чаще других. Я, например, вхожу в числа 1, 10, 11, 12, ...

— А я, — перебил Нуль, — в числа 10, 20, 30, ...

— Так вы ничего не докажете, — вмешалась Девятка. — Единица, хоть и любит спорить зря, в данном случае права. Давайте рассмотрим запись первого миллиона натуральных чисел. Разместим числа так, чтобы в каждом числе было по шесть цифр, а уж в миллионе — семь.

— Не выйдет.

— А вот и выйдет. В каждом числе, где цифр мало, впереди нули напишем:

000001
000002
......
000009
000010
000011
......
999999
1000000

В столбце единиц все цифры чередуются. Здесь их поровну. В столбце десятков поднимем нижний нуль на самый верх — выше первой строки. Тогда все цифры будут чередоваться десятками: десяток нулей, десяток единиц, десяток двоек... И снова окажется, что их поровну. В следующем столбце тоже поровну цифр — после перестановки нуля пойдут они сотнями. Вот так оказывается, что в шести колонках цифр поровну. Но ведь это при условии, когда во многих числах слева нули приписали. А если убрать эти нули, то всех цифр останется поровну, а нулей меньше всех... Но в последней строчке есть еще одна единица. Вот и выходит, что единиц больше всего, а нулей меньше всего использовано.

— Вот видишь, — торжествовала Единица, — для записи первого миллиона натуральных чисел единиц требуется 600001, а нулей всего 488890...

— Подожди, — перебила ее Пятерка, — это так, если все числа брать подряд. Но в жизни ведь не все числа употребляются одинаково часто. Люди любят, например, округлять свой возраст. Чаще всего при этом на последнем месте оказывается нуль, немного реже — пятерка. И цены часто округляют так же, и скорости, и расстояния... Потом ты забыла, что кроме целых чисел есть и дробные. А уже в десятичных дробях нули появляются частенько. Так что, какая цифра на практике употребляется чаще других, это еще проверить надо...

— То-то и оно, — повеселел Нуль, — нечего тут спорить. Тем более, что мы и схожи кое в чем.

— Это в чем же?

— А в какую натуральную степень нас не возводи — не меняемся. А если число возведут в нулевую степень, единица получится...

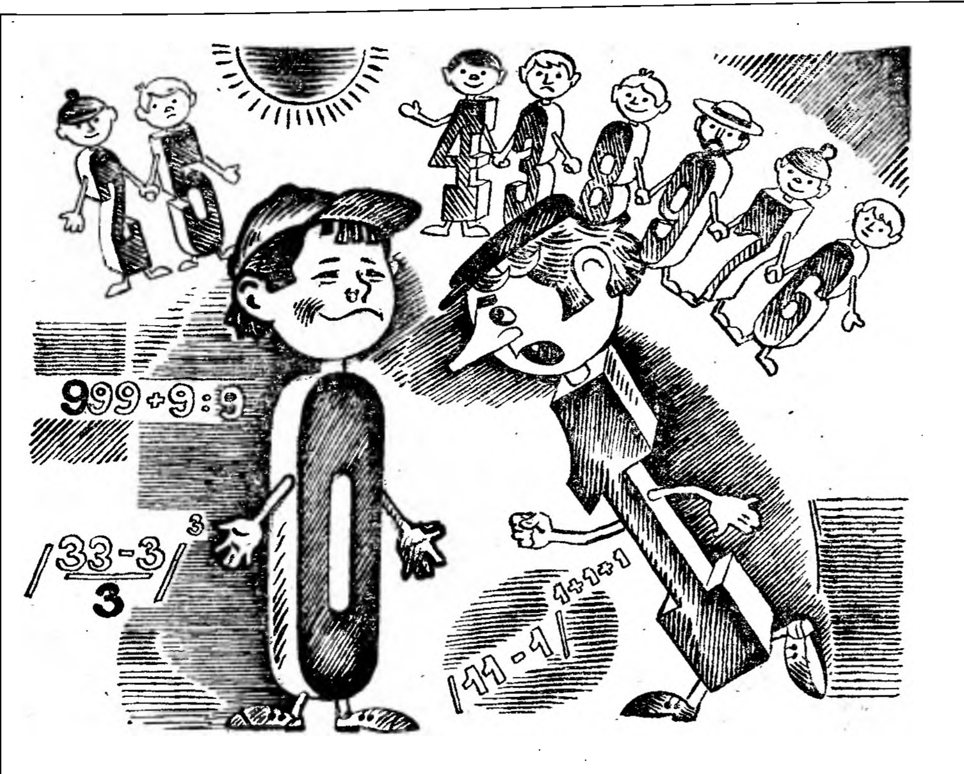
— Ну, насчет возведения в натуральную степень и другие цифры к постоянству склонны. У Пятерки и Шестерки любая степень кончается на 5 и 6.

— Я и не то могу, — улыбнулась Пятерка. — Любая цифра в пятой степени кончается сама собой.

— К постоянству и я некоторое отношение имею, — пробасила Девятка. — Если число делится на 9, то и сумма его цифр...

— Ой! — воскликнул Нуль, — без пяти семь! Скоро и на работу пора. Давайте быстрее на зарядку.

У цифр своя зарядка. Люди бегают, прыгают, сгибаются... А цифры упражняются в составлении чисел.



— По квадратам стройся![1]

И цифры послушно построились в два квадрата: 751689; 324.

— А теперь перестроиться в три квадрата!

И сразу от первой группы отделилась Девятка, а оставшиеся цифры перестроились: 15876.

Перестроились они и в четыре квадрата, и в пять квадратов.

Но тут зазвенел звонок, и цифры умчались к людям. Вместе со всеми поспешил и Нуль, довольный, что спор кончился благополучно...

II

А вечером Единица завела разговор с Нулем:

— Ну что, наработался?

— А как же. Мы, Нули, очень нужны оказались.

— Да кому вы там нужны были? Забыл уже, как утром цифры зарядку делали — квадратами строились. Тебя-то ведь не позвали. А почему?

— Как — почему? Кому-то ведь руководить надо было...

[1] Это значит построиться так, чтобы каждая группа цифр образовала число, являющееся квадратом. Квадрат получается при умножении числа на себя. Например, 81 — квадрат 9; 751689 — квадрат 867.

— Да, рассказывай... Позови тебя, все построение сразу испортишь. Стоит, например, 36. Точный квадрат. Замечательное число. Его еще пифагорейцы очень любили.

— А что в нем особенного?

— Особенного много. Это и $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ — сумма первых восьми натуральных чисел. Это и $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ — сумма первых шести нечетных натуральных чисел. Это и $(1 + 2 + 3)^2$. Так вот — пусти тебя к такому числу. Станет 306 или 360. Уже не квадрат...

— Это уж зря, — примирительно сказал Нуль, — я ведь знаю, где можно становиться, чтобы квадраты не разрушать. Стоит, например, число $289 = 17^2$. Вот я пристроился бы за Восьмеркой, и получилось число 2809, а это 53^2.

— Да там и квадрата такого не было... Ты лучше скажи, где бы ты пристроился, если бы цифры разместились в пяти квадратах и в четырех квадратах.

— Я бы много и не перестраивал. Скажем, стояли пять квадратов — 784, 36, 25, 9, 1. Я бы стал впереди первого квадрата, увел за собой Семерку и Восьмерку, и стали бы мы впереди 25. Получилось число 87025, а это — квадрат. И от первого числа остался квадрат — 4.

А если надо построить четыре квадрата вместо пяти, я соединю 36 и 25, а сам встану после Тройки. Получится $30625 = 175^2$, а другие квадраты и трогать незачем.

— А если бы стояло четыре квадрата?

— Все равно. Пусть стояли квадраты 784, 361, 25 и 9. Я бы во втором квадрате оставил на месте число 16, а Тройку увел. Тогда вместо третьего квадрата получился квадрат $3025 = 55^2$.

— Ну, а если три квадрата?

— Взял бы квадраты 361, 529, 784, стал после Двойки и скомандовал этой группе: «Кругом!» Из этого числа вышло бы $9025 = 95^2$. Легко строить и два квадрата, например: $983025 = 945^2$, $1764 = 42^2$.

— Хитер ты, Нуль, хитер. Чего доброго, скажешь, что мог бы и кубы[1] строить?

— А почему бы и нет. Без меня можно построить два точных куба, например: 8 и $32461759 = 319^3$ или $125 = 5^3$ и $438976 = 76^3$. Со мной тоже можно построить два куба: $9261 = 21^3$ и $804357 = 93^3$. Но я могу помочь построить и больше кубов. Вот, например, четыре куба: 1, 8, 64 и $205379 = 59^3$.

— Что ты все пристаешь к Нулю, — не выдержала Двойка, — сама-то чем знаменита? Забыла уже, что единицу и числом не считали.

— Ну, когда это было! — недовольно отмахнулась Единица.

— Да что там вспоминать старое, — ехидно заметила Тройка. — Ведь натуральные числа и теперь делят на простые и составные. А единицу не считают ни простым, ни составным числом...

— И пусть, — рассердилась Единица, — все равно все целые числа из единиц состоят. А когда говорят о простых числах, единицу

[1] Кубом называется произведение трех равных множителей. Например, 64 есть куб 4, так как $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, а 1728 — куб 12.

непременно упоминают: простым называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя — единицу и само это число.

— Нечего об этих простых числах говорить, — лениво отозвалась Двойка, — кроме меня, все они нечетные. Да и признаки делимости на них...

— А чем вам признаки не нравятся? — сразу отозвалась Пятерка. — Разве на 5 плохой признак? Если цифра единиц 0 или 5, то число делится на 5...

— Хорошо, на 5 — легкий признак. Не очень трудный и на 3. А вот на 11 заметно сложнее. Нужно брать сумму цифр на четных местах и сумму цифр на нечетных местах. Если разность этих сумм делится на 11, то и все число делится на 11. Не просто[1]. Вот на одной олимпиаде дали пятиклассникам задачу: использовав цифры от 1 до 9 по одному разу, составить наименьшее возможное девятизначное число, которое делится на 11. Если бы не был указан признак делимости на 11, никто бы не справился.

— А так справились?

— Не все, конечно, но многие справились. Сумма всех цифр числа 45. Значит, разность между суммами цифр 0, 11, 22 или 33. Но сумма цифр нечетная, поэтому разность между двумя суммами нечетная. Но она не 33, потому что в этом случае одна из сумм равна 39, а другая 6. Но. сумма четырех значащих цифр больше 6. Поэтому сумма пяти цифр 28, а остальных четырех 17. Так они и пришли к числу 123475689[2].

— Но ведь на 11 не самый сложный признак делимости, есть и сложнее.

— Конечно, есть. Число делится на 19, если после того, как в нем зачеркнуть цифру единиц и к оставшемуся числу прибавить удвоенную зачеркнутую цифру, получится число, кратное 19.

— Ну, здесь выигрыш невелик, — сказала Семерка, — пожалуй, лучше прямо делить...

— Положим, это не одно и то же. Но если хочешь, можно дать и другой признак. Будем отделять не одну последнюю цифру, а две. Если к оставшейся части прибавлять учетверенную отделенную, а потом проверять делимость суммы, проверка станет короче.

— А верно ли это?

— Конечно. Пусть число $100x + y$. А мы рассматриваем $x + 4y$. Легко проверить, что $4(100x + y) - (x + 4y) = 399x = 19 \cdot 21x$. Значит, если $x + 4y$ делится на 19, то и $100x + y$ делится на 19.

Похожий признак делимости на 17. Отделим в числе три последние цифры и вычтем из оставшейся части увеличенное в 6 раз отделенное число (или наоборот) или вычтем из отделенного числа утроенное оставшееся (или наоборот). Взять можно то, что проще окажется[3].

Например, дано число 278528. По первому способу, $528 \cdot 6 - 278 = 2890 = 17 \cdot 470$, а по второму — $278 \cdot 3 - 528 = 306 = 17 \cdot 18$.

[1] Попробуйте доказать, что этот признак правильный.

[2] А как бы вы решили задачу, если бы нужно было аналогично составить десятизначное число, использовав по одному разу все цифры?

[3] Докажите, что это верно.

— Хитро уж очень...

— Тебе-то помалкивать следовало бы. Какой признак делимости на 7?

— Зачем же сразу и признак требовать, — сконфузилась Семерка, — можно ведь дать описание проверки. Отделим от числа две последние цифры. Сложим отделенное число с удвоенным числом слева. Если сумма делится на 7, то и число делится на 7. А можно и иначе. Отделим от числа три последние цифры. Число на две части разделится. Найдем их разность. И так будем делать до тех пор, пока не получится число меньше тысячи. А тогда уже проверим делением...

— Такой способ годится и для 11 и 13, — заметила Шестерка.

— Похожий способ и для проверки делимости на 37. Разобьем число справа налево на группы по три цифры (в самой левой может быть и меньше цифр) и сложим все группы. Если выйдет больше тысячи, повторим разбивку. Когда получим трехзначное число, разделим его на 37[1].

— Вот видите, — вмешалась Единица, — с делимостью не так просто. А вот однажды школьникам дали задание использовать только какую-нибудь одну цифру и, если потребуется, знаки действий и скобки, чтобы написать число 1000. Как вы думаете, каких цифр потребовалось меньше всего?

— Конечно, девяток. Всего пять штук: $999 + 9 : 9$.

— Верно. А потом идет единица, нужно шесть штук: $(11 - 1)^{1+1+1}$.

— Это почему же Единица на втором месте? — зашумели цифры. — Мы не хуже. Пятерок тоже нужно шесть: $(55 - 5)(5 \cdot 5 - 5)$, а троек и пяти достаточно: $\left(\frac{33 - 3}{3}\right)^3$... А потом, почему это разговор пошел о тысяче? Конечно, для Единицы это удобное число. А если бы дали, например, задание написать число 1976. Сколько бы тогда потребовалось единиц?

И верно. Тут самой удобной оказалась Четверка. Можно было бы обойтись семью цифрами: $44 \cdot 44 + 44 - 4$ или $44(44 + 4 : 4) - 4$. Двоек бы хватило восемь: $2(2 \cdot 22^2 + 22 - 2)$ или $(22 \cdot 2)^2 + (22 - 2)\,2$. Троек потребовалось бы девять: $(333 - 3)(3 + 3) - 3 - 3 : 3$, пятерок же десять: $(55 + 5 \cdot 5 - 5 : 5)\,5 \cdot 5 + 5 : 5$.

А больше всего потребовалось бы единиц — не меньше 11 штук!

Пристыженная Единица замолчала.

Время было позднее, и спор сам собой прекратился.

ИЗ ПРИКЛЮЧЕНИЙ ПЕТИ ВЕРХОГЛЯДОВА

1. СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Зашел раз Петя к приятелю, тот что-то пишет.

— Что это ты, Миша, делаешь? — спрашивает Петя. — Выходит, ты до сих пор домашнего задания не выполнил...

— Да вот примеры с дробями еще не кончил.

[1] Проверьте последние способы. Учтите, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, а $999 = 37 \cdot 27$.

— Не может быть! — удивился Петя. — Там же такие простые числа....

— Не смейся, — говорит Миша, — ты лучше скажи, как сократить дробь $\frac{26}{65}$? Ни на 2, ни на 3, ни на 5 она не сокращается.

— А ты сократи на 6, — посоветовал Петя.

— Это как же — на 6? Ведь ни 26, ни 65 на 6 не делятся...

— А ты зачеркни одинаковые цифры в числителе и в знаменателе. В числителе останется 2, а в знаменателе 5. Значит, дробь равна $\frac{2}{5}$.

— Ты ошибаешься, — говорит Миша. — Учитель не так объяснял.

— Да что ты сомневаешься. Проверь: $26 : 2 = 13$ и $65 : 5 = 13$; значит, ответ правильный. А учитель мог так и не сказать, он же не всегда показывает самый простой способ решения...

И мальчики начали сокращать дроби.

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4};\ \frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};\ \frac{19}{95} = \frac{1}{5}.$$

Быстро и просто!

Но вдруг случилось неожиданное. По их вычислениям $\frac{28}{84}$ равняется $\frac{2}{4}$, т. е. $\frac{1}{2}$, а это не так. Попробовали сократить $\frac{36}{63}$, и тоже не получилось по ответу...

Задумались ребята. Выходит, все же способ неправильный и нужно браться за учебник. Но почему же несколько раз получался верный результат?

2. ПЕТЯ СЧИТАЕТ УСТНО

— Как твои дела в школе, Петя? — спрашивает старший брат.

— Конечно, хорошо, — говорит Петя. — Я сегодня чуть «пятерку» не получил.

— Это за что же?

— За устные вычисления. Понимаешь, сегодня на уроке нам написали столбик примеров на умножение дробей. Ну, я вижу — все пишут, и много. Думаю: не может быть, чтобы все было так сложно. Начал решать устно. Получилось — проще и куда скорее...

— Как же ты считал?

— Вот написано $6\frac{1}{4}$ умножить на $4\frac{4}{5}$. Я взял и округлил — первое около 6, а второе около 5. Перемножил 6 на 5, и вышло по ответу. Взял другой пример: $3\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13}$. Одно увеличил до 4, другое уменьшил до 3. Опять просто и опять по ответу. Получился и третий пример: вместо $21\frac{1}{3} \cdot 3\frac{15}{16}$ я взял $21 \cdot 4 = 84$. Елена Андреевна даже ахнула.

«Ну, — говорит, — ты прямо чудо, не пятиклассник, а вычислительная машина. Никогда бы не подумала, что ты так замечательно считаешь. Сейчас я тебе «пятерку» поставлю. Иди-ка к доске, покажи остальным свое умение».

— Ну, и поставила?

— Я же сказал, что чуть «пятерку» не поставила. Дала она мне решать пример: $2\frac{2}{9} \cdot 3\frac{3}{5}$. Я его по-своему решил: $2 \cdot 4 = 8$. А когда она попросила записать, я написал так, как считал на самом деле. Вот тогда она рассердилась и «пятерку» уже ставить не стала.

— Почему же?

— Да она стала объяснять, что мой способ приближенный, годится только для прикидки. А какой же он приближенный, если выходит точно по ответу.

— Ты так и сказал?

— Конечно. А она дала еще один пример, и не сошлось. Я тогда сказал, что этот пример неправильный. Она стала спрашивать меня правило. Ну, а я не очень твердо знал правило умножения. Тогда Елена Андреевна сказала, что я маленький хитрец и большой лентяй. По ее словам, мне полагалось бы поставить «двойку», но выдумка была интересной, и она «двойку» не ставит...

3. ОВЦЫ НА ПАСТБИЩЕ

Заглянул Петя к старшему брату, тот задачу решает.

— Что, — спрашивает Петя, — не выходит?

— Не выходит... Понимаешь, на первый взгляд простая задача, но почему-то не выходит.

— Ну, если простая, читай условие. Задачи и я умею решать. О чем там?

— На трех лугах, площади которых пропорциональны числам 5, 4 и 3, пасутся овцы. На первом 18 овец могут пастись 15 дней, на втором 16 овец могут пастись 12 дней. Сколько овец могут пастись на третьем лугу 4 дня?

— Это и в самом деле простая задача, — говорит Петя, — тут, собственно, и делать нечего. Слушай: на втором лугу овцы пасутся 12 дней, а на третьем — только 4 дня, т. е. в 3 раза меньше. Значит, там могут пастись не 16 овец, а в три раза больше, т. е. 48 овец.

— Всегда ты, Петя, торопишься, — говорит брат. — Площади лугов различны...

— Ну, и что, могу учесть. На третьем лугу площадь составляет $\frac{3}{4}$ площади второго. Значит, там могут пастись не 48 овец, а $\frac{3}{4}$ от 48, т. е. 36 овец.

— А почему ты начал со второго луга? Там же говорится и о первом.

— Да это в задаче, наверно, просто так, для проверки.



— Ладно, давай проверим. На первом лугу овцы ежедневно съедали по 18 порций, а за 15 дней они съели 270 порций. Площадь третьего луга составляет $\frac{3}{5}$ площади первого. Значит, там съели только $270 \times \frac{3}{5} = 162$ порции. Чтобы съесть столько травы за 4 дня, там должны пастись (162 : 4) сорок с половиной овец.

— Да нет, — говорит Петя, — ты ошибся. Не может быть, чтобы — с половиной.

— Нет, не ошибся. Это точно. Да все равно, хоть и без половины. Ведь выходит не 36, а другое число...

Начали читать еще раз, а там имеется дополнительное условие: «Считать, что трава на всех лугах растет равномерно и с одинаковой быстротой».

— Понимаешь, Петя, на лугах есть трава. Овцы ее едят, а она нарастает...

— Значит, овцы съели на первом лугу не 270 порций, а больше?

— Нет, съели-то они 270 порций, но это не только та трава, которую они застали на лугу, но и та, которая выросла, пока они паслись.

— Теперь-то я понимаю, — говорит Петя, — что это не так уж просто... Как же все-таки решить эту задачу?

4. ВЫНЕСЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ

Сегодня у Пети неприятности. Все товарищи давно гуляют, а он никак не может выполнить упражнения. Они не сложные, но на уроке Петя почти не слушал учителя и не все записал. Теперь он просматривает тетрадь с классными записями, но никак не может разобраться в ходе решения.

Ему нужно упростить выражение $\sqrt{2\frac{2}{3}}$, а в примерах, которые записаны в тетради, под корнем — правильные дроби. Думал, думал Петя, ничего придумать не может.

— Да что я, собственно говоря, думаю так долго, — рассердился Петя. — Если бы не было этих двух целых, я решил бы пример? Решил бы. Ну, так я уберу эту двойку из-под корня, вот и все.

И Петя пишет: $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$

Посмотрел в ответ: точно так. Значит, верно. И Петя пишет дальше:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5 \cdot 6}{24 \cdot 6}} = \frac{5}{12}\sqrt{30}.$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{7}} = 2\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 49}{7 \cdot 49}} = \frac{2}{7}\sqrt[3]{98}.$$

А дальше почему-то перестало получаться. Петя подсчитал, что $\sqrt[3]{3\frac{3}{4}}$ равен $\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$, а в ответе — и перед корнем и под корнем другие числа. Думал Петя, что это опечатка, но и со следующим примером получилось то же самое...

Сидит Петя и ломает голову: почему же сначала его решения совпадали с ответами в книге?

5. ВОСКРЕСНАЯ ПРОГУЛКА

С утра у Пети было прескверное настроение. Вчера писали контрольную работу по геометрии. Он был уверен, что решил задачу верно, но сегодня оказалось, что двое Петиных друзей, решавших ту же задачу, получили другой ответ. Один из них, узнав, что вышло у Пети, брался даже объяснить, в чем ошибка. Но огорченный Петя не стал его слушать...

Было от чего расстроиться. Опять нелады с математикой! Видно, просто не везет ему: учительница спрашивает именно то, чего он не знает, и задачи попадаются самые каверзные...

Между тем погода была чудесной. Сидеть целое воскресенье дома было просто невозможно. Да и чего горевать заранее: оценки в дневник за контрольную когда еще поставят...

— Давай-ка сходим к дяде Егору, — предложил Петя старшему брату Федору, — он нас давно приглашает. Побываем у него в саду, на пасеке, рыбку половим — словом, хоть один денек поживем без математики...

— Пойти в гости я согласен, — сказал Федор, — только не представляю, как ты целый день собираешься с математикой не встречаться.

— Да очень просто. Пройдемся пешком, полакомимся яблоками, может, искупаемся... Так мы до самого понедельника с математикой и не встретимся.

— Сомневаюсь, — сказал Федор, — думаю, что математика о себе даст знать. Даже в выходной день. Ну, да ладно, пошли.

И они отправились в путь.

Минут через двадцать Петя и Федор увидели группу ребятишек, о чем-то споривших. Подойдя к ним, братья поздоровались и поинтересовались, что это ребята не поделили.

— Деньги, — серьезно ответил один из мальчиков. — Нашли мы кошелек с деньгами.

— А много ли нашли? — поинтересовался Петя.

— Да не очень много. Шли мы вчетвером по дороге на речку и беседовали о том, о сем. Семен рассказал, как пионеры во время летних каникул отправились в горы и нашли там слюду. Их за это открытие премировали. А Борис припомнил, как их сосед нашел деньги. Так мы и заговорили о находках.

Антон сказал, что хорошо бы нам найти на дороге кошелек с деньгами. Если бы он, например, нашел деньги, то взял бы себе треть, а остальное отдал бы нам. Борис сказал, что привык делить поровну. Если бы мы нашли деньги, то он взял бы себе только четверть. Я в шутку сказал, что не жадничаю, мне хватило бы и пятой части. А Сеня сказал, что согласен и на шестую часть...

Только мы об этом поговорили, вдруг увидели на дороге кошелек, покрытый пылью. Подняли его, открыли. В кошельке оказалось 12 монет — по 50, 20 и 10 к. И решили мы разделить находку так, как загадывали. Но оказалось, что не просто это сделать. Только я мог бы взять свою пятую часть.

Вдруг подходит к нам старичок. Мы и попросили его разменять нам деньги. Он узнал, в чем дело, и говорит:

— Размен вам, ребята, не поможет. Не делится найденная вами сумма ни на 3, ни на 4. Но не беда. Давайте уж я помогу разделить вашу находку...

Он вынул из кармана пять двухкопеечных монет, бросил их в наш кошелек. Получилась такая сумма, что он легко выдал нам треть, четверть, пятую и шестую части. Мы поблагодарили старика и предложили ему взять на память найденный нами кошелек. Старик взял кошелек с оставшимися там монетами, поблагодарил нас и пошел своей дорогой.

После его ухода мы еще раз пересчитали полученные деньги. Оказалось, что мы получили больше денег, чем рассчитывали. Например, я получил на 2 к. больше, чем следовало; у меня оказалась одна из двухкопеечных монет старика...

— Значит, — сказал Петя, — нужно было догнать старика и отдать ему его деньги.

— Мы так и хотели сделать. Но вдруг заметили, что получили 12 монет, да не те, что были в кошельке. Я получил двухкопеечную монету старика, но никому не досталась десятикопеечная монета. Выходит, что старик унес ее в кошельке.

— И вы побежали вдогонку за стариком? — спросил Федор.

— Нет. Во-первых, его уже и след простыл. Во-вторых, мы до сих пор не понимаем, что за чудо случилось: получили мы денег больше, чем собирались, да еще кое-что из находки досталось прохожему...

— Тут и думать нечего, — сказал Федор. — Вы с самого начала собирались получить не все, что нашли. Вот сложите свои доли и увидите, что получается меньше единицы. По рассказу я, например, могу сказать, что нашли вы 3 р. 50 к., можно сказать, какие монеты были в кошельке.

Вот вы займитесь дробями, а мы с Петей пойдем дальше...

Когда братья отошли от ребят довольно далеко, Петя сказал, что пусть Федор не думает, будто он от своих слов отказывается. Находка — редкий случай, больше им математика не встретится...

Молча дошли они до перекрестка. Вдали уже был виден поселок, в котором жил дядя Егор. И тут Петю осенило.

— Федя, давай пойдем напрямик. Так ведь куда ближе. Если идти по дороге, то придется сперва пройти по грунтовой, пока не выйдем на шоссе, оно идет перпендикулярно грунтовой. А по лугу мы пройдем куда меньшее расстояние: ведь гипотенуза короче суммы катетов...

Но Федор не поддержал брата.

— Короче-то короче, это верно. Но ведь дорога хуже. Мы будем идти куда медленнее. Так что времени уйдет больше, чем по дорогам.

— Не выдумывай, Федя. Тут почти на километр ближе...

— А ты все-таки посчитай. До шоссе нам идти километр. Идем мы по грунтовой дороге со скоростью 3 км/ч. Значит, потратим 20 мин. По шоссе нам идти 2400 м. Это я знаю точно: в прошлом году мы помогали ремонтировать дорогу и тогда измеряли расстояния. Пойдем мы по шоссе в полтора раза быстрее, чем по грунтовой. Значит, будем идти еще 32 мин. А длину пути по лугу можно вычислить. Если длины катетов 1 и 2,4, то длина гипотенузы 2,6. Чтобы этот путь пройти за 52 мин, нужно идти по 3 км в час, т. е. с такой же скоростью, как по грунтовой дороге. А мы будем идти куда медленнее... Так что, Петя, твое предложение не подходит...

Дядю Егора мальчики застали в саду за сбором яблок. Только на двух яблонях еще были плоды. Под остальными лежали кучи краснобоких яблок.

— А, помощнички явились, — весело приветствовал племянников дядя, — давайте-ка сюда. Только осторожнее, цыплят не передавите...

Действительно, по саду бродили беленькие и пестрые цыплята.

— И много их здесь? — спросил Петя.

— А это уж, дружок, сам сосчитай. Здесь два семейства. Среди белых — курочек втрое больше, чем петушков, а среди пестрых — курочек втрое меньше, чем петушков. Всего же курочек вдвое больше, чем петушков...

— Да их, наверное, легче пересчитать, — отшутился Петя. — Пестрых мало, все больше белые ...

— Нет, ты сосчитай, племянничек, докажи, что не зря в школу ходишь...

Петя назвал число, однако дядя сказал, что это неверно.

— Да тут же простые выкладки, — вмешался Федор. — Общее число цыплят делится на 24. Поскольку белые все от одной наседки, то цыплят именно 24, а не больше в несколько раз[1].

— Вот так-то, Петя, — сказал дядя. — Ну, пошли к яблоням.

Втроем они быстро закончили сбор урожая и пошли к дому.

Дядя угостил племянников душистым медом.

Глядя на брата, отдающего должное сладкому угощению, Федор спросил Петю, не забыл ли он, какую форму имеют соты.

— А чего там помнить: шестиугольные...

— Верно, в плане это правильные шестиугольники. А ты не думал, почему их форма именно такая?

— Зачем мне это? От этой формы вкус меда не зависит...

— Вкус, конечно, не зависит, — вмешался дядя Егор, — но кое-что зависит. Дело в том, что количество воска в улье ограниченное. Если выберешь плохую форму для ячеек, будет мало места для меда, мало его и запасешь...

— Это что же выходит, по-вашему, пчелы делают геометрические расчеты?

— Расчетов, конечно, не делают, но жизнь заставила искать выгодную форму. Тот рой, который израсходовал весь воск и запас мало меда, зимой мог и погибнуть...

— Может, это и так. Но при чем здесь шестиугольник?

— А это нетрудно высчитать. Если заполнять плоскость неправильными многоугольниками, сумма длин сторон окажется большей, чем при заполнении правильными фигурами. При этом сумма величин углов при каждой вершине должна равняться 360°. Значит, к каждой вершине сходятся такие углы, что величины их — делители 360°. Поэтому заполнять плоскость можно либо равносторонними треугольниками (60°), квадратами (90°) или правильными шестиугольниками (120°).

— Так почему же шестиугольник лучше треугольника или квадрата?

— У него на единицу площади сумма длин сторон меньшая, чем у них. Устно это не сделаешь, но можно на бумаге посчитать. Вот дойдешь до восьмого класса, будешь и такие вычисления выполнять.

Петя не стал спорить с братом.

Доев мед, мальчики поспешили к реке.

Когда они вечером возвращались домой, Федор спросил у брата:

— Ну как, доволен прогулкой?

— Еще бы! И отдохнули, и поплавали, и немало вкусного поели...

— А как насчет математики?

[1] Если пестрых курочек x, а белых петушков y, то $x + 3y = 2(3x + y)$. Отсюда следует, что $y = 5x$, т. е. белых цыплят $20x$, а пестрых цыплят $4x$. Поскольку белых цыплят не может быть 40 или больше, то $x = 1$.

— А что математика? Мы же отдыхали...

— Так-таки и не было математики?

— Откуда же? Хотя... Нет, Федя, пожалуй, ты прав, без нее мы даже в выходной день не обошлись...

ВИЗИТЕРЫ

...Задача оказалась настолько интересной, что Петя решительно отодвинул приключенческую повесть, которую начал было читать. В условии речь шла о восьми учениках различных классов одной школы. Сообщались факты, которые на первый взгляд не имели никакого отношения к вопросу задачи: кто в выходной день ездил на реку, а кто в лес... Но Петя уже решал такие задачи. Он взял лист бумаги, начертил таблицу и стал заносить в нее данные условия.

Но фактов было довольно много, связи между ними не очевидны, занести это в таблицу оказалось сложно. Петя устал и на мгновение закрыл глаза.

И вдруг он ясно услышал свое имя. Кто-то звал его. Петя открыл глаза и увидел перед собой двоюродного брата Вовку. Тот стоял у стола и ехидно улыбался.

Петя даже не задумался над тем, откуда вдруг появился тут Вовка, который живет совсем в другом городе. Он хорошо помнил Вовку, приезжавшего к ним летом отдыхать. Насмешливый, озорной, капризный. Уж если Вовка улыбается тебе, жди неприятностей...

— Пока ты спишь, — сказал Вовка, — к тебе визитеры пришли.

— Какие визитеры? — удивился Петя. Он ничего не понял, но насторожился: Вовкина улыбка предвещала беду.

— Что значит — какие? Обыкновенные визитеры. К тебе.

Петя лихорадочно пытался вспомнить, кто такие визитеры. Была, кажется, такая часть костюма — визитка. Но это явно ни к чему. В старину будто бы не просто ходили в гости, а наносили визиты. Но с визитами ходили к начальству, к богачам. А кто же пойдет с визитом к обыкновенному восьмикласснику...

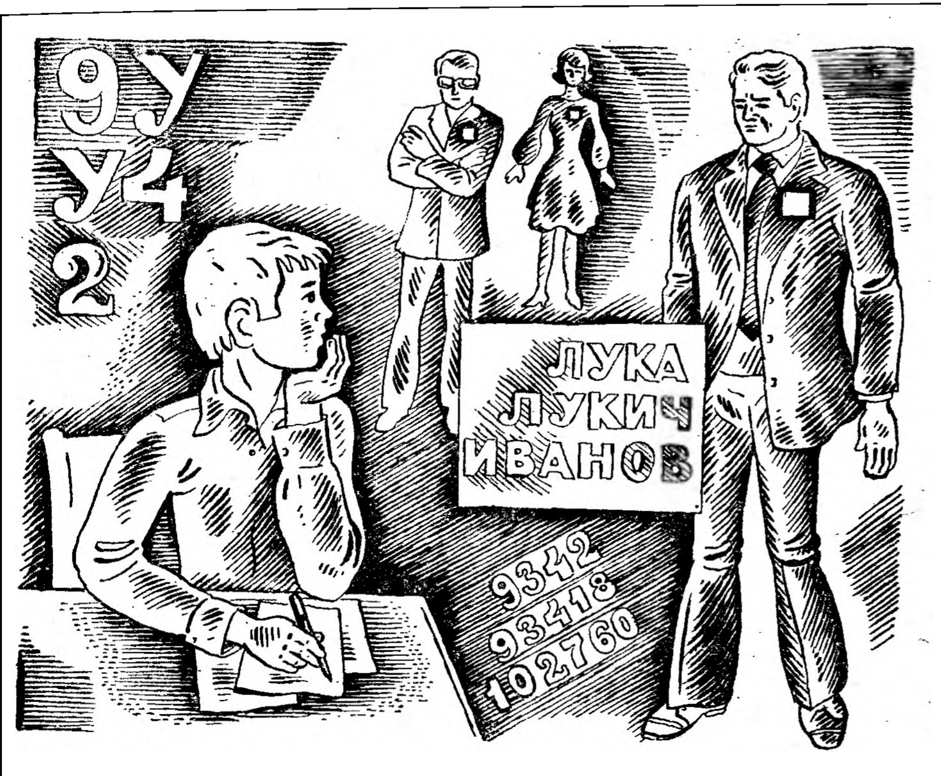
— Они что — с визитом пришли? — неуверенно спросил он, все еще надеясь хоть что-нибудь понять в случившемся.

— Не с визитом, а с визитными карточками, — отрезал Вовка. — Помнишь, дядя Коля рассказывал, как он был на международном конгрессе. Там ученые ходили с карточками на костюмах — кто и откуда прибыл. Так им было легче знакомиться и беседовать во время перерыва. Так вот у этих тоже, — Вовка хихикнул, — на костюмах визитные карточки...

Глядя на удивленное лицо Пети, Вовка махнул рукой и прибавил:

— Одним словом, приготовься. Сейчас я их впускаю.

Он отворил дверь, и комната быстро заполнилась. Петя заметил, что у мужчин действительно на лацкане пиджака белели какие-то прямоугольники. Что-то там было написано, но разобрать издали было трудно. У женщин такие же прямоугольники были на платьях — вместо брошек.



Один из вошедших приблизился к столу, за которым сидел Петя и приветливо кивнул ему. На его пиджаке Петя разглядел прямоугольник с надписью:

ЛУКА
ЛУКИЧ
ИВАНОВ

— Здравствуйте, Лука Лукич! — произнес Петя и протянул руку через стол. — Очень приятно познакомиться...

Но Лука Лукич не пожал Петиной руки.

— Во-первых, Петя, — строго начал он, — протягивать первому руку старшим не является признаком хорошего воспитания. А во-вторых, мой друг, с нами знакомятся совсем по-иному. Ты прочел мою визитную карточку, но ничего в ней не понял. А ведь она — с секретом...

— Ну, какой же может быть секрет в визитной карточке? — искренне удивился Петя. — Имя, отчество, фамилия — вот и весь секрет...

— Нет, нет, секрет имеется, — прервал Петю Лука Лукич. — Каждая буква на визитной карточке означает какую-то цифру, причем, сколько бы раз она ни встречалась, ее значение не меняется. А различные буквы означают различные цифры. Три слова в моей визитной карточке означают три числа: два первых — слагаемые, а третье — их сумма.

— Вот так штука! — ахнул Петя. — Не карточка, а математический ребус...

— Вот именно, — улыбнулся Лука Лукич. — И знакомиться с нами можно только одним способом — расшифровать наши визитные карточки. А вот когда познакомишься с нами, мы можем рассказать немало интересного...

— Но ведь это сложно... — неуверенно забормотал Петя. Но под строгим взглядом Луки Лукича он придвинул к себе лист бумаги и начал писать.

— Значит, первое слагаемое — четырехзначное, второе — пятизначное, а в сумме шесть цифр. В таком случае, первая цифра суммы 1. Но тогда второе слагаемое начинается цифрой 9, а под ней стоит нуль...

$$\begin{array}{r} 9\,.\,.\,. \\ 9\,.\,.\,1\,. \\ \hline 1\,0\,.\,.\,.\,0 \end{array}$$

По последнему столбику, А + Ч = 10. Перехода в столбце У + К нет, иначе У и А были бы одинаковыми. Поэтому У + К не больше 8, а У больше А на 1.

— В общем, придется испытать значения А, — произнес Петя. — А меньше 8 и не меньше 2. Так ведь? — взглянул он на Луку Лукича.

— А у нас не полагается спрашивать, — сухо сказал тот, — нужно решать совершенно самостоятельно.

— А я и так всегда решаю самостоятельно, — обиделся Петя, — никогда на контрольных замечаний не получал...

И он снова склонился над записью.

— Если А = 2, то У = 3, Ч = 8, — шептал он. — Для К не годится 5 или больше. Но тогда Н = 8 или 9, а эти цифры уже использованы. А если К = 4, то Н = 7, О = 6. Все сходится...

— Нашел, Лука Лукич, — заявил он. — Там написано: 9342 + + 93418 = 102760.

— А ты уверен, что там написано только это? А вдруг возможны и другие расшифровки написанного...

— Вы правы, — смутился Петя, — нужно проверить и другие значения А.

Он снова склонился над листом бумаги и забормотал:

— Если А = 3, то Ч = 7, У = 4. Тогда К = 2, Н = 6. Но 2 + + 1 + 1 = 4, т. е. К и О одинаковы. Не годится!

Наконец он закончил вычисления.

— Другие значения не подходят, — твердо сказал Петя, — я проверял. Карточка имеет только одну расшифровку.

— Верно, — сказал Лука Лукич, — теперь все в порядке. Рад познакомиться! — и он пожал руку Пети.

Повинуясь какому-то незаметному сигналу Луки Лукича, гости приблизились к столу и стали полукругом, так что Петя смог разглядеть их визитные карточки.

Карточки были различной формы и окраски. У ближайших к столу гостей Петя заметил:

ИЛЬЯ	БОРИС	ДЕНИС	ЛУКА
ИЛЬИЧ	ФОМИЧ	ИЛЬИЧ	ИЛЬИЧ
КАЛКОВ	БАРСОВ	ДЕСТИН	ЧУКЛОВ

Несколько карточек было на украинском языке:

ІВАН	СЕМЕН	ГНАТ
ІЛЛІЧ	ІЛЛІЧ	ІЛЛІЧ
БУЧИЛО	КЕНЛЮК	ТРАШИН

На платьях женщин Петя заметил карточки:

АННА	ЕЛЕНА	ANNA	ANNA
МАРИЯ	ЛЬВОВНА	LUISA	LUISA9
ПЕРМАХ	ВАНТОВА	NEIRUT	SUSSEN

—А что это за девятка на карточке Анны Луизы? — спросил Петя.

— Это значит, что запись сделана не в обычной системе счисления, а в девятеричной. В ней наибольшая цифра — 8. Но это не единственная такая карточка. Ты присмотрись лучше.

И верно. Петя заметил карточки:

КАРЛ	ПИМЕН
ГЕОРГ8	НИЛЫЧ9
ЛОКЕР	МИЛНЕВ

— Подойдите поближе, — сказал одному Лука Лукич, и Карл Георг приблизился к Пете.

Помня свой конфуз при знакомстве с Лукой Лукичом, Петя не стал протягивать руку, а начал вычислять.

— Раз система восьмеричная, то здесь самая большая цифра 7. Г меньше Л ровно на 1. Ни К, ни Г не нули, как первые цифры чисел. Е + К дает переход. Испытаем. Если Г = 1, то Л = 2, Р = 3, Е = = 6 ... Какое ни бери К, окажется, что О либо 2, либо 3 ... А если К = 7, то О = 5. Но тогда А = 2 = Л. Не годится...

Прошло несколько минут, и Петя торжествующе протянул Луке Лукичу лист. Там после вычислений в углу было обведено сложение:

$$\begin{array}{r} 2174 \\ 36073 \\ \hline 40267 \end{array}$$

— Верно, — одобрительно сказал Лука Лукич. — Знакомься побыстрее с Карлом Георгом. Другие тоже ожидают своей очереди.

— Как — другие? — ужаснулся Петя. — Да ведь вас так много. Пока решишь...

— Значит, много... Значит, долго... — возмутился Лука Лукич. — А еще говорили, что он любит решать интересные задачи...

Он взмахнул руками, и комната мгновенно опустела. Стало темно, и ничего уже разобрать нельзя было.

Петя потер глаза, раскрыл их и с удивлением заметил, что не видно никаких следов пребывания посетителей. На столе лежал только лист бумаги с началом решения задачи о восьми школьниках.

— Неужели все это мне приснилось?.. Невероятно...

И, припоминая виденное, Петя добавил:

— А все-таки интересные были визитные карточки. Надо будет записать, пока помню, и предложить ребятам на математическом кружке...

ВЫБОР НАСЛЕДНИКА

В некотором царстве, в некотором государстве жил-был царь. Как он жил, как его подданным жилось, о том в этой сказке не молвится. Всякое бывало. Но вот состарился царь. Тут поневоле о судьбе царства и о наследниках задумаешься...

Стал царь список своих детей и родственников пересматривать. Для надежности, чтобы не забыть кого-либо, затребовал на всех личные дела. Листает он день, листает второй, а все никак выбрать не может. По характеристикам все высших похвал достойны. А о фотографиях и говорить нечего: все красоты неописуемой. На что уж троюродный племянник — этого царь хорошо помнил — ходит вечно с перекошенным от злости лицом, а и его на карточке представили так, что только диву даешься — спокойное, благообразное лицо. Здорово фотографы и ретушеры поработали!

— Нет, — решил царь, — так я ничего не выберу. Нужно искать наследника иначе. Управлять страной теперь сложно стало, нужно и это учесть, и то... Тут без математики не обойтись.

И объявил царь свою волю: наследником объявит того из родственников, кто себя лучшим знатоком математики покажет.

Тут уж наследники на царя рассердились.

— Безобразие! — кипятился один. — Зачем мне математика?! Для подсчетов и учета работников у меня будет достаточно...

— Еще чего придумал, — пожимал плечами другой. — Учил я математику лет двадцать тому назад, давно все позабыл...

Третий и вспомнить не смог, сдавал ли вообще когда-нибудь экзамены по математике, а тут какие-то новые испытания...

Но царь был непреклонен. И вызвал желающих к себе в тронный зал. Столики велел там поставить, доски внести. Позвал царь претендентов.

А пришло всего четверо.

Огорчаться царь не стал: не пришли, — стало быть, не доросли до управления царством. Сказал царь собравшимся несколько слов. Дескать, править государством — дело нелегкое, размышлять надобно. Поэтому и хочет он выбрать среди них того, кто лучше других соображать может.

— Для разминки, — говорит, — напишу я вам несколько слов. Какое тут не в лад, разберитесь.

Нажал он кнопку, и на экране появились слова:

КАСТА, КОРАВАЧ, ГИДОН, РЕБСОК, ЛУПЕДЬ, ЧАНОГЯ, ЛЕПАСИНЬ.

Задумались претенденты. Слова какие-то несуразные. Видно, буквы в словах переставлены... Через некоторое время один говорит:

— Кажется, нашел я, ваше величество. Если в словах буквы поиному расставить, то породы собак получаются: такса, овчарка, боксер, пудель, гончая и спаниель. А третье слово переделывается в динго — хоть и родня собакам, но не служит человеку, а вредит ему. Его-то и надо исключить.

— Никак нет, — говорит второй, — чем нападать на динго, лучше к пятому слову присмотреться. Из этих букв не пудель, а дупель получается — птица. Вот птицу и нужно исключить из списка, останутся четвероногие.

— И собаки, и динго, и дупель — все это животные, — говорит третий. — А вот последнее слово нужно иначе читать. Из этих букв апельсин получается. И ему-то среди животных не место...

— Мудрите вы больно, — говорит четвертый, — а ведь, наверное, все проще. Первым словом — такса — не обязательно животное называют, оно ведь обозначает и расценки за виды услуг...

Не дал царь спору разгореться, остановил претендентов.

— Теперь, — говорит, — думаю, что вы поняли, в чем сущность испытания. Хочу я видеть, как вы рассуждаете. Вот и начнем. Покажите мне сперва, как вы считать умеете.

Напишите мне миллион с помощью шестерок. Употребляйте знаки действий и скобки, можно пользоваться степенями и знаком корня, коли потребуется. Но шестерок постарайтесь израсходовать как можно меньше.

— Тут долго думать нечего, — говорит один, — знаков много не нужно: $(6666666 - 666666) : 6 = 1000000$. Четырнадцать шестерок. Вот и все.

— Нет, — говорит второй, — можно и поменьше. $6666 - 666$ разделим на 6, будет 1000. Возведем ее в степень $(6 + 6) : 6$, вот миллион и получится. А цифр-то уйдет только 11.

— А я, пожалуй, и десятью шестерками обойдусь, — говорит третий, — возьму $(666 - 66) : 6$ и возведу в куб, т. е. в степень $(6 + 6 + + 6) : 6$. Одна цифра и сбережется...

— Чего уж тут по одной цифре сберегать, — говорит четвертый, — цифр-то ровно вдвое меньше требуется. $(66 - 6) : 6$ — это 10. Возведем в шестую степень, миллион получится.

— Ну, говорит царь, — тут ты удачливее их оказался, находчивее. Ладно, наблюдательность вашу я увидел. Теперь я хочу проверить терпение. Что означает запись сложения?

Нажал царь кнопку, и на экране зажглись слова:

КОРОВА + ЛАСКА + КОРМА = МОЛОКО.

— Здесь каждая буква означает некоторую цифру, одинаковые буквы — **одну и ту же цифру, а разные буквы — разные цифры.**



Уселись претенденты и стали писать. Потом двое руку подняли: готово.

Подал царь знак одному: рассказывай.

— Тут, — говорит, — и рассказывать нечего. Я просто испытал поочередно все возможные значения А. Перебрал варианты, один из них и сгодился: $640418 + 38968 + 64078 = 743464$.

— Много ли вариантов испытывал?

— Не очень. 36 штук.

— Все же многовато, — говорит царь. — Терпение у тебя, конечно, есть... Ну, а ты? — спрашивает он у другого.

— Ответ у меня такой же. Я сперва заметил, что $М - К = 1$, а суммы $Л + К$ и $В + М$ равны каждая 10, 9 или 8, а сумма $С + Р$ равна 8 или 9. Значит, К не больше 8, М не меньше 2. К тому же увидел, что А — не 0 и не 5. Когда стал варианты перебирать, все это пригодилось.

— Ладно, — говорит царь, — с сложением целых чисел вы знакомы. Пойдем теперь дальше.

Некий математик заявил, что ему в $a^3 + b^3 + c^3$ году было $a \cdot b \cdot c$ лет. Его внук сказал, что если x, y, p — простые числа, то ему в $(xyp)^2$ году было $x + y + p$ лет. На сколько внук моложе деда?

Склонились претенденты над листами бумаги. Считали долго. И хотя нашли правильный ответ, царь остался недоволен.

— Ежели, — говорит, — на такие простые вопросы столько времени расходовать будете, то трудные и вовсе не рассмотрите...

Вот вам вопрос деловой. В мастерской нужно изготовить детали. В каждый комплект входят три детали А, Б, В — по одной. Каждую из них нужно изготовить на любом из трех станков, которые имеются в мастерской. На первом можно за день изготовить либо 80 деталей А, либо 60 деталей Б, либо 40 деталей В. На втором соответственно 50, 70 или 100, на третьем — 20, 50 или 30. Сколько комплектов деталей сможет изготовить мастерская за день?

— Наверное, 50, — говорит один из претендентов. — Если каждый станок будет готовить полный комплект деталей, то они изготовят комплектов соответственно 18, 22 и 9, т. е. 49. А если первый будет делать только детали А, второй — детали В, а третий — детали Б, то выйдет 50 комплектов, да еще немного деталей А и В останется...

— То-то и плохо, что лишние детали останутся, — говорит другой. — Если бы первый станок $\frac{3}{4}$ смены изготовлял детали А, а потом перешел на детали Б, то он бы изготовил 60 деталей А и 15 деталей Б. А второй мог бы успеть изготовить 10 деталей А, 5 деталей Б и 70 деталей В. Вот тогда бы вышло не 50, а 70 комплектов.

— Это, конечно, лучше, — говорит третий, — но ты смолчал, что второй станок работал не в полную силу. Он мог бы сделать еще 3 детали Б, которые некуда было бы употребить. Я бы поставил другое задание. Первый бы мог изготовить 73 детали А и 5 деталей Б, второй 18 деталей Б и 73 детали В, а третий — только детали Б. Вот тогда и вышло бы 73 комплекта.

— Наверное, больше сделать нельзя, — говорит четвертый, — только проверить это можно при помощи линейного программирования. Слыхал я что-то о нем, но забыл начисто...

— Да, — говорит царь, — многое вы забыли, да видно и знали не больно много и не очень твердо. Ладно, дам я вам еще одно задание. Недалеко от нашей столицы разместился небольшой городок. У него все улицы одинаковой длины: 5 улиц идут с севера на юг и 5 улиц — с запада на восток. Разбивают они городок на 36 кварталов квадратной формы. Кварталы большие. Просят жители организовать им транспорт — либо трамвай, либо троллейбус. Вот и подумайте, сколько линий и как проложить, чтобы и длина линий была невелика, и остановок было не очень много, да чтоб каждый мог сойти на такой остановке, откуда до его дома не больше двух кварталов пешком идти приходилось...

Нажал царь кнопку, и на всех досках план города появился. Подошли претенденты и стали цветными мелками линии наводить на досках (рис. 1).

У первого царь сразу все забраковал: больно длинные дороги, да и мало кому до дому близко будет. У второго три линии, да и те расположены так, что на средней и развернуться негде будет. Третий вариант немного лучше, но и тут нужны места для разворотов. Четвертый вариант, пожалуй, экономнее выглядит...

Задумался царь, потом сел на место и говорит:

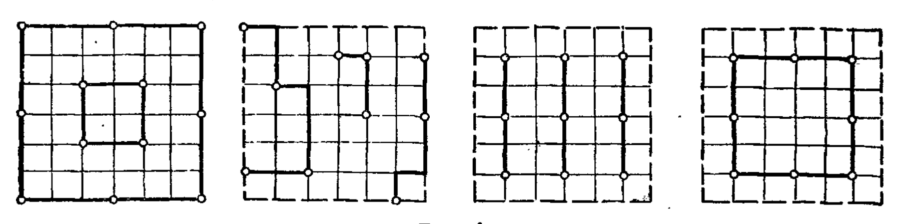


Рис. 1

— Знаете вы маловато, думаете не скоро. К тому же спорите друг с другом без серьезного повода. Кого из вас ни поставь править, ничего хорошего не получится. Надо поискать кого-нибудь более подходящего...

НАХОДЧИВЫЙ ЖЕНИХ

Случилось это в незапамятные времена в одном из восточных царств.

Съехались в столицу молодые люди царскую дочь сватать. Царевна слыла красавицей. Царь правил страной толково, царство разбогатело. Так что можно было надеяться и на богатое приданое и на наследование завидного престола. Поэтому и женихов съехалось немало.

Все они были царю представлены. Ничего не скажешь — родовитые женихи собрались. У всех отцы правят соседними царствами или княжествами. Юноши здоровые, ловкие. За столом себя вести умеют.

Но что-то все они царю не очень понравились. Речи у них только о пирушках, об охоте, о походах военных... А ведь страной править и в мирное время надобно. Хорошо бы выяснить, умны ли царевичи.

И объявил царь, что отдаст дочь за того, кто успешно проявит себя на испытаниях. Состязания будут проводиться по бегу, стрельбе, геометрии и арифметике.

Первое испытание прошло просто. Часов и секундомеров не потребовалось. Объявил царь, что дальше состязаться будут только те, кто придет к финишу в числе первой дюжины. Так сразу претендентов и поубавилось.

В состязаниях на меткость стрельбы отсеялись еще шестеро женихов, стрелявших хуже других.

На третий день перед царем предстали шестеро женихов. Царь сидел на троне и довольно улыбался. Ему удалось придумать для царевичей хитроумную задачу.

— Подойдите сюда, — позвал он юношей.—Вот прозрачная квадратная пластинка. Длина каждой стороны ее 140 джебов. Придумайте, как ее можно разделить на 10 квадратных частей так, чтобы у каждого квадрата длина стороны составляла целое число джебов.

Пластинку резать не нужно. Достаточно наметить на ней тонкой кистью линии возможного разреза.

Сейчас вы получите по пластинке, кисти, краски, линейки, циркули. Отправляйтесь в свои покои и думайте, как выполнить задание.

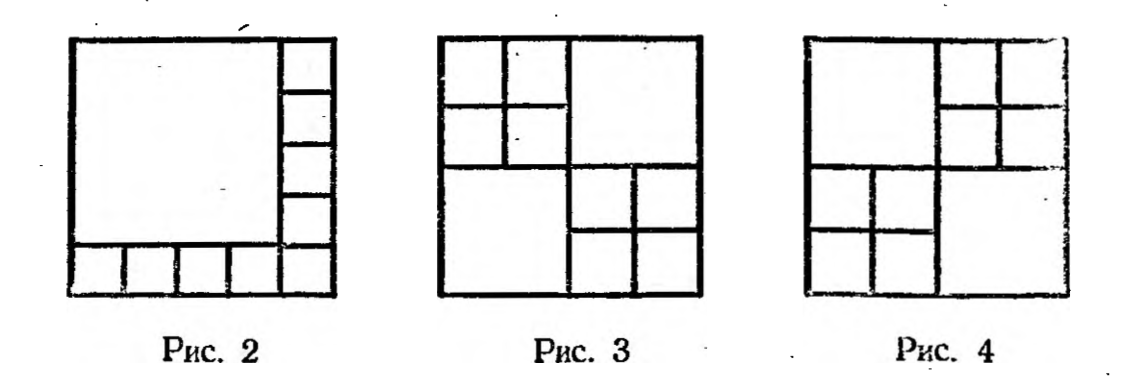


Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

Около ваших комнат будут наблюдатели. Никто из сведущих в математике входить к вам не будет, ни с кем советоваться не придется.

Решения свои принесете завтра утром.

— Великий царь, — сказал один из юношей, — незачем ждать до утра. Не стоит терять время напрасно. На 10 квадратов разделить квадратную пластинку нельзя. На четыре части можно. Можно и на девять частей, но в этом случае длины сторон окажутся дробными числами в джебах. А на десять частей невозможно. Я отказываюсь заниматься такой задачей.

— Ну что же, — сказал царь, — если отказываешься, неволить тебя не стану. Пусть решение поищут остальные пятеро.

Утром пятеро женихов принесли свои пластинки. Словно сговорившись, все они разметили пластинки одинаково. Одна часть была квадратом со стороной в 112 джебов, а девять — квадраты со сторонами по 28 джебов (рис. 2).

Царь остался доволен.

— Вот вы и доказали, что деление на 10 квадратов возможно. Теперь вам предстоит доказать, что такое решение не единственно возможное. Вы должны будете и в следующие 6 дней приносить решения задачи. Но новые решения должны быть такими, чтобы при сравнении пластинок не нашлось двух одинаковых и одинаково расположенных квадратов. Иными словами, если пластинку наложить на любую другую, представленную вами ранее, никакие два квадрата не должны совпасть.

— О, великий государь, — сказал один из юношей, — я с великим трудом нашел это решение. Найти новые решения мне будет не под силу...

— Ну, что ж, — сказал царь, — честное заявление лучше попыток обмана. Иди с миром.

На второй день четверо юношей снова явились с одинаковыми решениями: у каждого получилось по два квадрата со стороной в 70 джебов и по восемь квадратов со стороной в 35 джебов (рис. 3).

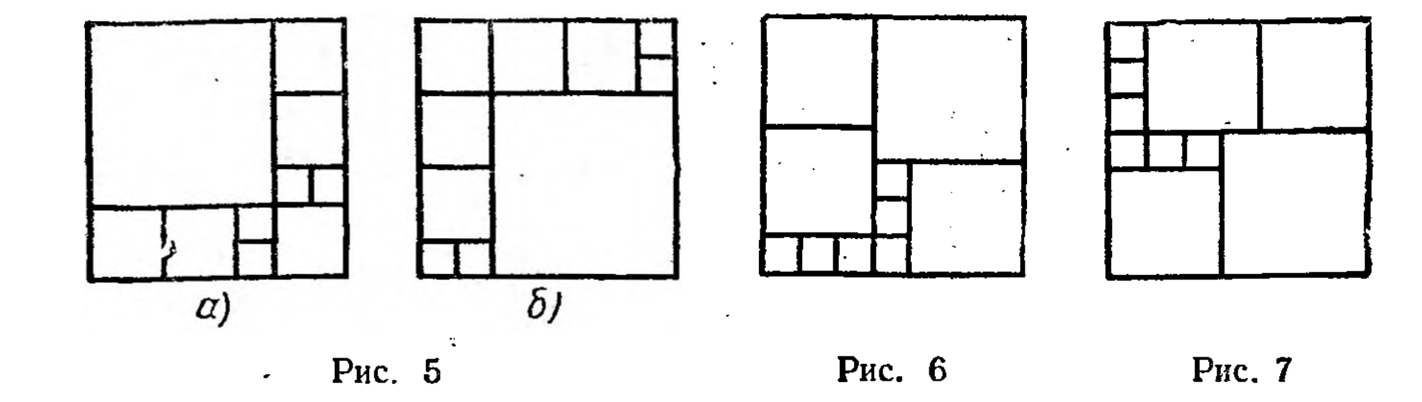
На третий день двое юношей признались, что нового варианта разрезывания пластинки не придумали.

Царь отпустил их с миром.

Посмотрев работу двух других женихов, он воскликнул:

— Но ведь это то же самое, что вы мне показывали вчера! Вы только повернули пластинку на прямой угол (рис. 4).

— Но, царь, — мягко возразил один из юношей, — это не противоречит условию задачи. Если наложить сегодняшнюю пластинку на вчерашнюю, ни один из квадратных кусков не совпадет с другим...



а) б)

Рис. 5 Рис. 6 Рис. 7

Царь признал его правоту и отпустил оставшихся двух претендентов.

В следующие два дня юноши принесли варианты разрезывания на квадраты с длинами сторон в 100, 40 и 20 джебов (рис. 5).

На шестой день один из юношей пришел с чистой пластинкой: ему не удалось придумать новый вариант разрезывания.

Его соперник торжествующе показал, как можно разрезать пластинку иа квадрат со стороной в 80 джебов, три — со сторонами по 60 джебов и шесть — со сторонами по 20 джебов (рис. 6).

— Что ж, — сказал царь, — ты остался один, Алтаф. Посмотрим, сумеешь ли ты и завтра принести новое решение.

— Принесу, — сказал уверенно Алтаф, — и не нужно ждать до завтрашнего утра. Я могу и сейчас показать другое размещение тех же квадратов.

И он быстро показал на другой стороне пластинки линии разреза (рис. 7).

— Ты победил, Алтаф, — сказал царь, — но хотя ты остался один, все равно тебе придется выдержать еще испытание по арифметике...

Утром царь и его советники ждали Алтафа.

— Скажи мне, о юноша, — начал один из них, — как велико число, у которого половина есть квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень целого числа?

— О, мудрец, — сказал Алтаф, — твоя задача имеет ясное решение. Это число — нуль. Но, если ты хочешь услышать о других числах с теми же свойствами, подожди немного.

Немного погодя, он заявил, что таких чисел сколько угодно. Следующее содержит множителем двойку 15 раз, тройку 10 раз и пятерку 6 раз, это 30233088000000.

— Достаточно, — сказал царь и предоставил слово другому мудрецу.

— Я не буду касаться, как мой достопочтимый предшественник, высоких степеней, — начал тот, — но скажи, юноша, может ли квадрат оканчиваться одинаковыми цифрами, отличными от нуля? Если да, то какими именно и сколько таких цифр может быть написано подряд?

Немного подумав, Алтаф заявил, что нашел ответ и на этот вопрос.



— Квадрат может кончаться цифрой 1, 4, 5, 6, 9 или 0. По условию, нуль исключен. Если последняя цифра 6, то предыдущая — нечетная, т. е. не 6. Если последняя цифра 1, 5 или 9, то предыдущая — четная. Поэтому в конце квадрата могут оказаться одинаковые цифры — только четверки. Известно, что $38^2 = 1444$. Таким образом, три четверки в конце квадрата оказаться могут. Может ли их быть больше?

Из трехзначных чисел при возведении в квадрат в конце три четверки дает только 538. Если взять четырехзначное число с тремя последними цифрами 538 или 038, то цифра тысяч его квадрата оказывается нечетной. Значит, больше трех четверок в конце не получится.

Увидя, что задавший вопрос удовлетворительно кивает головой, царь подал знак третьему знатоку математики.

— О, великий государь, — заговорил тот, — позволь мне не задавать вопроса. Юноша и так уже доказал, что лучше других женихов достоин твоей прекраснейшей дочери. И сейчас он показывает, что достаточно посвящен во многие тайны лилавати[1]. Стоит ли продолжать испытания?

[1] Так называл математику знаменитый индийский математик XII века Бхаскара в книге «Венец науки», позднее этот термин употребляли и другие ученые.

— Стоит! — отрезал царь. — Не хочешь задавать вопросы, я сам предложу ему последнюю задачу.

— Скажи мне, Алтаф, — обратился он к жениху, — что ты думаешь о встречах гонцов. Они отправились одновременно — один из селения Акола в Бопал, другой из Бопала в Аколу. Через 42 мин они встретились. Достигнув Бопала, первый отправился обратно и настиг второго через 1 ч 52 мин после этой встречи. Достигнув Аколы, они отправились в Бопал и так далее. Встретятся ли они когда-нибудь в центре одного из названных селений?

— О, царь, — сказал Алтаф, — твоя тонкая задача имеет решение, которое твой покорный слуга изложит без записей. Двигаясь навстречу, оба гонца прошли совместно путь за 42 мин. Значит, вместе они проходят за минуту $\frac{1}{42}$ пути между селениями. Первый обогнал второго на расстояние между Аколой и Бопалом за 2 ч 34 мин, т. е. за 154 мин. Следовательно, в минуту он обгонял его на $\frac{1}{154}$ пути. Разность $\frac{1}{42}$ и $\frac{1}{154}$ есть $\frac{4}{231}$, поэтому второй гонец проходит за минуту $\frac{2}{231}$ пути, а весь путь — за 115 с половиной минут. Первый проходит в минуту $\frac{1}{42} - \frac{2}{231} = \frac{1}{66}$ пути, т. е. тратит на весь путь 66 мин.

Каждый раз второй гонец будет прибывать в Аколу, затратив нечетное число раз по 115,5 мин. Поскольку первый прибывает туда, затратив четное число раз по 66 мин, одновременно в центр Аколы они не попадут.

А вот в Бопале они могут встретиться. Первый попадет туда через нечетное число раз по 66 мин, а второй — через четное число раз по 115,5 мин. Наименьшее кратное чисел 66 и 231 есть 462. Действительно, через 462 мин после начала движения первый гонец попадет в Бопал в четвертый раз, а второй гонец — во второй раз.

В дальнейшем такие встречи будут происходить через каждые 924 мин, если только гонцы не свалятся от усталости раньше...

Царь привстал, давая понять, что испытание окончено.

О дальнейшем мы рассказывать не станем. Скажем только, что находчивый Алтаф навсегда сохраннл привязанность к математике.

СКАЗКА О ТРЕХ БРАТЬЯХ И ВОЛШЕБНЫХ ПИРОГАХ

Поехали однажды добрые молодцы — три брата — свет повидать, себя показать. В дороге старшие братья чуть не разорили гнездо перепелиное, да не дал младший брат Иван малых пташек в обиду. Радовалась перепелочка и пообещала Ивану при случае отблагодарить его, службу сослужить. Хотели было старшие братья затоптать крота-землеройку, но и за него заступился Иван-молодец. Уполз крот в нору цел-невредим и тоже отслужить верную службу Ивану пообещал.

А потом повстречали братья змея-горыныча. Пытался тот не пустить братьев ехать дальше. Стал их словами грозными запугивать

и огнем жарким палить. Да не испугались братья силы вражеской, в бою кровавом изрубили змея-горыныча на куски.

Доехали братья до перекрестка дорог и решили оставить младшего брата здесь — дорогу сторожить. А старшие братья поехали вперед, к дальним горам. Вернуться пообещали к вечеру двадцать пятого дня.

Обиделся младший брат, что не взяли его старшие с собой. Что ему делать-то? От кого дорогу оберегать? Змея-горыныча ведь изрубили...

Лег он в тень под деревом и уснул сладко. А малые змеи-горынычи, проведав о том, подобрались к нему, осилили сонного и в темницу бросили.

Темница сырая, глубокая. Высоко окошко малое, да и то решетчатое.

Сторожить пленника злющих змеев поставили. А те и рады. Думают, будут стоять у входа в темницу. А проголодаются, надоест им сторожить — съедят они Ивана-молодца. Тем дело и кончится.

Стал на стражу первый змей. Нет-нет, да и заглянет в темницу, смотрит на Ивана злыми глазами.

Горюет Иван: далеко братья старшие, о беде его не ведают. Некому Ивана вызволить...

Но тут на окошко перепелочка села.

— Не горюй, Иван-молодец, — говорит, — будем мы тебя с кротом-землеройкой выручать. Перво-наперво надо твоих стражей задобрить, чтобы не съели они тебя. А там, и братья воротятся...

Знаем мы, где хранятся пироги волшебные. Если дать змею кусок такого пирога, он тебя целый день трогать не станет...

Сейчас тебе крот первый пирог принесет. Весь он — как доска шахматная: клетки на нем черные и белые. Стражу надо давать кусок прямоугольный, по краям клеток отрезанный так, чтобы черных и белых клеток поровну было. И чтобы каждый день давать кусок больше вчерашнего...

Улетела перепелочка. Вскоре что-то зашуршало в углу темницы. Вылез крот-землеройка и подал Ивану-молодцу пирог волшебный. Как и говорила перепелочка, пирог на шахматную доску похож. Только не квадратный он, а прямоугольный — восемь на семь.

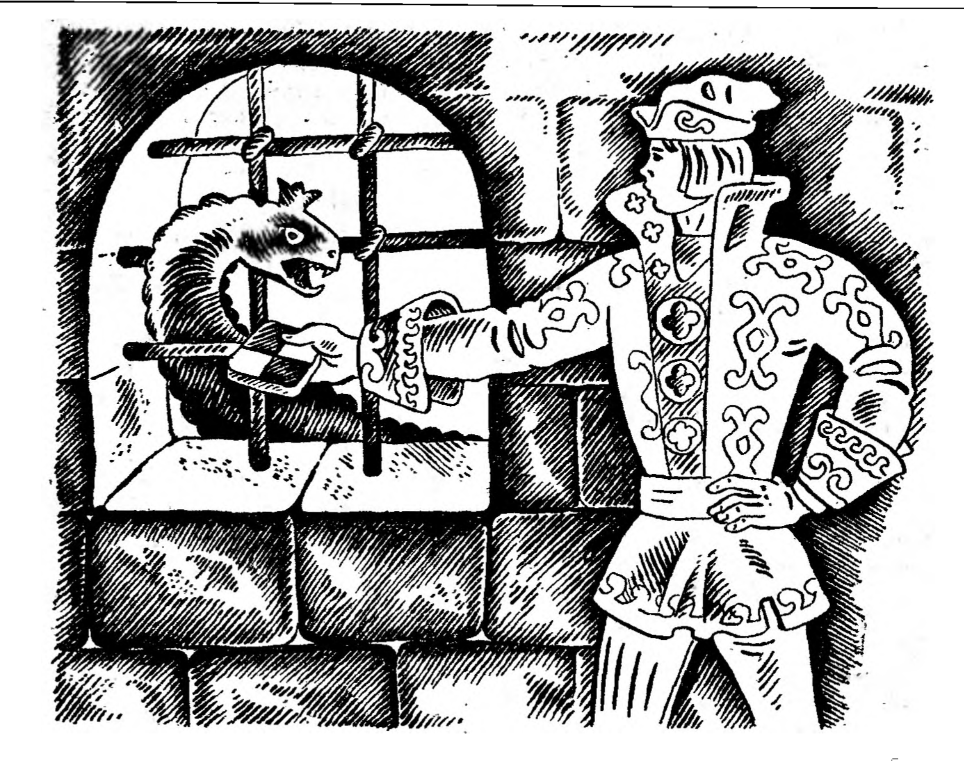
Поблагодарил Иван крота, и тот уполз.

Подумал Иван, подумал, да и разделил пирог на 7 кусков, как велела перепелочка. Давал змею по куску в день, тот молодца и не тронул.

Сменился страж. Поставили на новую неделю у дверей второго змея.

И опять на окошко опустилась перепелочка. Утешает она Ивана-молодца.

— Сейчас тебе крот-землеройка второй волшебный пирог принесет. Будешь и этому стражу лютому по кусочку в день давать. Как и в первый раз, куски должны быть прямоугольными, по краям клеток отрезанными, да чтоб в каждом куске число клеток было нечетным. К тому же — каждый кусок должен быть больше вчерашнего...



Получил вскоре Иван-молодец от крота второй пирог. И этот совсем как шахматиая доска. Только вдоль одного края трех клеток нет.

Поразмыслил Иван-молодец и разрезал пирог на куски. Семь дней давал своему стражу по куску, тот Ивана и не съел.

Пришел сторожить третий змей. Этот и более злой, чем два первых, и более голодный.

Принес крот Ивану третий пирог. А перепелочка уже на окне сидит.

— Этого змея, — говорит она, — сменять не будут. И больше пока помочь мы тебе, Иван-молодец, не сможем, кончился запас пирогов волшебных. Постарайся кормить своего стража подольше. Давать ему нужно кусок пирога каждый день. Да только следи, чтоб все куски разные были и каждый на букву Г похож...

Стал размерять Иван-молодец. Трудная задача. Не видно, как на много кусков пирог разрезать. А мало кусков будет, съест его змей-сторож...

Все-таки сумел Иван-молодец пирог на одиннадцать кусков разделить.

Вот съел страж и одиннадцатый кусок. Видит, больше пирога у Ивана-молодца не осталось. Ухмыляется: завтра уж он непременно съест пленника.

Да только зря ухмылялся. Воротились к вечеру старшие братья, порушили гнездо змеиное, вызволили из беды брата младшего.

Вызволить-то вызволили, но и отругали крепко: уж коли поставили дорогу сторожить, нечего спать ложиться... А за смекалку похвалили.

Как же резал пироги волшебные Иван-молодец?

ПРИНЦЕССА-ШАХМАТИСТКА

Когда-то давным-давно в некотором царстве, в некотором государстве жил-был царь. И была у него дочь. Пришло время отдавать ее замуж. Принцесса увлекалась шахматами и устраивала всем женихам строгие шахматные испытания.

Объявил царь, что, если найдется такой любитель шахмат, который выдержит испытания, выдаст царь за него свою дочь, приданое даст богатое.

Вот и решил один юноша попытать счастья. Не очень его невеста интересовала, тем более он ее ни разу не видел. Не очень его приданое соблазняло. Просто любил он шахматы, разбирался в игре и решил силы попробовать.

Пришел он во дворец, объяснил, зачем явился. Там не стали заполнять на него длинные анкеты, записали имя и фамилию в книгу претендентов и предложили перво-наперво сыграть партию с шахматным автоматом.

Сел юноша за столик шахматный. Автомат сидит напротив. Смотрит на доску одним глазом зеленым. Юноша ход сделает, а автомат свой ответ показывает. Слуга тот ход на доске делает.

Сыграли они партию. Не смог юноша победить противника, но и тот его не одолел. Вничью партия окончилась.

— Что ж, — говорит сановник царский, — раз не проиграл, проходи дальше.

А идти нужно через поле, разделенное на шахматные клетки. Перемещаться по полю можно только ходом шахматного коня. Ступать на каждую клетку можно раз, но побывать нужно во всех клетках. Поставили юношу на поле b2, а конец пути должен быть на поле e8. Там есть дверь в башенку.

Подумал юноша немного. Нарисовал доску шахматную, наметил путь движения да и обошел все клетки. Вышел в клетку указанную. Пришел в башенку.

Там его новый сановник ожидает.

— Возьми, — говорит сановник, — эти шахматы и отнеси их принцессе.

— А далеко ли нести? — спрашивает юноша.

— Нет, — отвечает тот, — иди прямо по дорожке. Только по пути могут остановить. Есть в четырех местах стража змеиная. Но их можно умилостивить. Вон в углу лежат торты в виде шахматных досок. Ими змеев и угощают. А как угощать, как торт делить, то уж сам придумаешь...

Взял юноша шахматы и 4 торта и пошел по дорожке.



Немного прошел, перед ним башня восьмиугольная, на ней дозор змеиный. Увидели юношу, спустились, путь преградил. Собрались сюда все 16 дозорных змеев.

Задумался юноша: как же их угощать? Ясно, что торт на 16 кусков делить придется, всем поровну. А на какие куски резать? Сообразил юноша, что следует резать по краям клеток. Потом вспомнил, что сторожевая башня восьмиугольная. Отрезал каждому змею кусок торта в форме восьмиугольника. Они остались довольны, расступились перед юношей. Пошел он дальше.

Вот перед ним лестница. На ее семи ступенях сидят семь змеев, подняли головы, на него глядят. На каждой ступени змей больше, чем на предыдущей.

Отрезал им юноша все куски похожие, но каждому змею кусок побольше, чем предыдущему. Один квадратик остался, съел его юноша сам, чтобы показать стражам, что пища съедобная. Пропустила его и эта стража.

Дошел он и до третьей стражи. Стоят четыре стража, на воротах нарисован круг и вписанный в него правильный десятиугольник. Понял юноша намек и дал каждому десятиугольный кусок торта шахматного. Всем поровну.

Четвертую стражу два змея несут. Большущие. Так свои кольца скрутили, что и не разберешь, как это сделано. Юноша разрезал

последний торт на две одинаковые части, да только так, чтобы побольше вершин в каждом куске оказалось и линия разреза была как можно длиннее. Взяли змеи куски торта и расступились.

Прошел юноша в главные покои. Там его встретили, за стол посадили, принцессе представили. Отдал он ей шахматы.

Только ничего из этой встречи не вышло. Принцесса оказалась далеко не красавицей, к тому же с очень сварливым характером. Сыграли они одну партию в шахматы, попрощался юноша и домой воротился.

Как же он по шахматному полю путешествовал и как торты делил?

СПОР У ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

Мистер Фиджит — большой мастер держать пари. Он спорит часто. И хотя в большинстве случаев он проигрывает, это его не останавливает.

Сегодня он пришел к своему другу мистеру Каму и застал его за решением шахматного этюда. Глядя на попытки мистера Кама задержать конями движение проходных пешек, Фиджит воодушевился.

— Оставьте уж вы эту задачку, — предложил он приятелю, — давайте-ка лучше бросим жребий для коней на шахматной доске.

— Какой жребий? — не понял мистер Кам.

— А так. Напишем на кусочках бумаги наименования полей клетки. Затем я буду вынимать из шкатулки два кусочка. На одно из полученных полей ставим коня. Если вы сумеете попасть конем на второе поле не позже, чем за три хода, ваш выигрыш. Не сумеете — мой выигрыш.

— Надо подумать. А почему вы предоставляете мне именно три хода. Может быть, достаточно меньшего числа ходов?

— Ну, уж нет, — заявил уверенно Фиджит. — Я не хочу вас грабить. Ведь и так у меня большие шансы остаться в выигрыше.

— А все-таки, — настаивал мистер Кам, — почему даются три хода?

— Самое меньшее потребуется один ход, а самое большее — шесть ходов.

— Верно. Если конь должен попасть из нижнего левого угла в верхний правый угол, то потребуется ровно шесть ходов.

— Вот видите, — поспешил Фиджит, — не менее одного и не более шести. В среднем выходит — три с половиной. Так что, ограничивая вас тремя ходами, я имею шанс остаться с крупным выигрышем.

Но мистер Кам решительно покачал головой.

— Дело обстоит гораздо сложнее, чем кажется на первый взгляд. Боюсь, что вы ошибаетесь, мой друг.

Он взял бумагу и погрузился в вычисления.

— Я был прав, — заявил он вскоре. — Если я соглашусь на ваши условия, то вы окажетесь в большом проигрыше. Величина отношения наших шансов примерно 8 : 3 в мою пользу.



— Не может быть! — воскликнул Фиджит. — Вы что-то путаете. Давайте сыграем, и вы убедитесь.

Но мистер Кам отодвинул шахматы и положил перед Фиджитом лист бумаги в клеточку.

— Пусть конь стоит в углу доски, — сказал мистер Кам. — Будем записывать, на каком ходу он может попасть в любую клетку доски (рис. 8).

Смотрите, шесть ходов потребовалось 1 раз, пять ходов — 10 раз, четыре хода — 21 раз, три хода — 20 раз, два хода — 9 раз, один ход — 2 раза. В среднем это составит 3,49 хода.

— Прекрасно! — воскликнул Фиджит, — выходит, что прав все же я.

— Не торопитесь, — прервал друга мистер Кам, — таких случаев только 4. Рассмотрим другие варианты — другие начальные положения коня.

Он начертил еще девять квадратов и заполнил клетки

5	4	5	4	5	4	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
2	3	2	3	4	3	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4
2	1	4	3	2	3	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4
•	3	2	3	2	3	4	5

Рис. 8

цифрами, показывающими за сколько ходов конь может попасть на это поле доски (рис. 9).

— Ну что ж, — взглянул на итоги вычислений Фиджит, — по-моему, все в порядке. Вижу случаи, когда трех ходов недостаточно. Раньше было 3,49, а теперь есть 3,21, вот вижу 3,08, а вот 3,02. Сколько же выходит в среднем? 2,88? Это уже почти 3 целых. Шансы почти равны. Можно играть.

Но мистер Кам предложил еще раз взглянуть на его таблицы.

Под каждым квадратом написано, сколько раз может встретиться такое начальное положение коня — либо 4, либо 8 раз. Всего один

4	3	2	1	2	3	4	3
3	·	3	2	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	2	3	2	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4

5 — 2, 4 — 17, 3 — 26,
2 — 14, 1 — 4.
среднее 3,02,
количество случаев 4

1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
3	·	3	2	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	2	3	2	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3	4	5

5 — 1, 4 — 14, 3 — 25,
2 — 17, 1 — 6,
среднее 2,79,
количество случаев 8

2	3	2	3	2	3	4	3
1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
3	·	3	2	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	2	3	2	3	4	3	4

4 — 11, 3 — 26,
2 — 20, 1 — 6,
среднее 2,67,
количество случаев 8

3	·	3	2	3	2	3	4
2	3	2	1	2	3	4	3
1	2	1	4	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	2	3	2	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3	4	5
3	4	3	4	3	4	5	4
4	5	4	5	4	5	4	5

5 — 6, 4 — 19, 3 — 23,
2 — 12, 1 — 3,
среднее 3,21,
количество случаев 8

2	3	·	3	2	3	2	3
1	2	3	2	1	2	3	4
4	1	2	1	4	3	2	3
3	2	3	2	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	4	3	4	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3	4	5
5	4	5	4	5	4	5	4

5 — 5, 4 — 17, 3 — 23,
2 — 14, 1 — 4,
среднее 3,08,
количество случаев 8

3	2	3	·	3	2	3	2
2	1	2	3	2	1	2	3
3	4	1	2	1	4	3	2
2	3	2	3	2	3	2	3
3	2	3	2	3	2	3	4
4	3	4	3	4	3	4	3
3	4	3	4	3	4	3	4
4	5	4	5	4	5	4	5

5 — 4, 4 — 15, 3 — 24,
2 — 16, 1 — 4,
среднее 2,98,
количество случаев 8

4	1	2	1	4	3	2	3
1	2	3	2	1	2	3	4
2	3	·	3	2	3	2	3
1	2	3	2	1	2	3	4
4	1	2	1	4	3	2	3
3	2	3	2	3	2	3	4
2	3	2	3	2	3	4	3
3	4	3	4	3	4	3	4

4 — 12, 3 — 24,
2 — 19, 1 — 8,
среднее 2,63,
количество случаев 4

3	2	3	2	3	2	3	4
4	1	2	1	4	3	2	3
1	2	3	2	1	2	3	4
2	3	·	3	2	3	2	3
1	2	3	2	1	2	3	4
4	1	2	1	4	3	2	3
3	2	3	2	3	2	2	4
2	3	2	3	2	3	4	3

4 — 9, 3 — 24,
2 — 22, 1 — 8,
среднее 2,54,
количество случаев 8

2	3	2	3	2	3	2	3
3	4	1	2	1	4	3	2
2	1	2	3	2	1	2	3
3	2	3	·	3	2	3	2
2	1	2	3	2	1	2	3
3	4	1	2	1	4	3	2
2	3	2	3	2	3	2	3
3	2	3	2	3	2	3	4

4 — 5, 3 — 24,
2 — 26, 1 — 8,
среднее 2,11,
количество случаев 4

Рис. 9

ход может потребоваться 336 раз, два хода — 1077 раз, три хода — 1536 раз, четыре хода — 903 раза, пять ходов — 176 раз, шесть ходов — 4 раза.

Для меня благоприятны случаи, когда требуется не более трех ходов. Таких случаев 336 + 1077 + 1536 = 2949. Неблагоприятны для меня случаи, когда придется делать четыре, пять, шесть ходов. Таких случаев только 1083. Шансы совсем не равны! Я буду укладываться в три хода гораздо чаще, чем не укладываться. Величина отношения примерно 2,72, т. е. около 8 : 3 в мою пользу.

Мистер Фиджит только вздохнул. Но его собеседник, войдя во вкус вычислений, продолжал:

— Даже если бы вы предложили считать, что, когда потребуется три хода, ничья, а мой выигрыш только в тех случаях, когда достаточно одного или двух ходов, то и тогда я буду в выигрыше...

— Ну, это уж слишком!

— Отнюдь нет. В мою пользу будут 336 + 1077 = 1413, а против меня 1083 случая. В среднем из семи результативных партий в мою пользу были бы четыре.

Фиджит молчал. Пари явно не удавалось. Вдруг его лицо просветлело.

— Бросим-ка жребий по-другому, — предложил он, — сыграем на других условиях. Вытащим наугад два поля и поставим на них ферзя и коня. Если одна из этих фигур может бить другую, то выиграл я. Если же ни одна из фигур не окажется под ударом другой, выигрыш ваш.

Он так настаивал, что мистер Кам согласился. Приятели написали на кусочках картона поля шахматной доски и приступили к игре.

23	24	25	25	25	25	24	23
24	27	29	29	29	29	27	24
25	29	33	33	33	33	24	25
25	29	33	35	35	33	29	25
25	29	33	35	35	33	29	25
25	29	33	33	33	33	29	25
24	27	29	29	29	29	27	24
23	24	25	25	25	25	24	23

Рис. 10

Однако она с самого начала сложилась не в пользу Фиджита. Он выигрывал значительно реже Кама.

— Удивительное невезение,— заметил Фиджит, — ведь шансы примерно равны.

— Сомневаюсь, — отозвался мистер Кам.

— И совершенно напрасно. Тут довольно простая арифметика. Ферзь с любого поля держит под ударом не менее 21 клетки и не более 27, в среднем 24. Прибавьте сюда поле, на котором он сам стоит, выходит уже 25 полей. Конь из любого положения бьет не менее двух полей и не более восьми, в среднем 5. Прибавьте занятое конем поле, и получится, что ферзь и конь в среднем держат под обстрелом 31 поле. А ведь половина доски — 32 поля. Видите, все довольно просто, шансы почти равны. Сегодня мне почему-то удивительно не везет...

— Вы опять ошибаетесь, мой друг. Давайте проверим ваш подсчет с помощью карандаша. Действительно, ферзь держит под ударом от 21 до 27 полей, а конь — от 2 до 8 полей. Давайте нанесем эти данные...

И мистер Кам нанес на одном квадрате числа, соответствующие числу возможных ходов ферзя с каждого поля, а на другом — количество возможных ходов коня с каждого поля. Затем приятели вдвоем просуммировали эти числа и записали результаты на клетках третьего квадрата (рис. 10).

— Вы понимаете, почему мы сложили эти числа? Ведь в вашу пользу, мистер Фиджит, и случаи, когда конь держит под ударом ферзя, и случаи, когда конь находится под ударом ферзя.

Как видите, в 4 случаях под ударом 23 поля, в 8 случаях — 24 поля, в 16 случаях — 25 полей, в 4 случаях — 27 полей, в 16 случаях — 29 полей, в 12 случаях — 33 поля, в 4 случаях — 35 полей. В среднем получается: $(23 \cdot 4 + 24 \cdot 8 + 25 \cdot 16 + 27 \cdot 4 + 29 \cdot 16 + 33 \cdot 12 + 35 \cdot 4) : 64 = 28$.

Как видите, в средием ферзь держит под ударом или может быть бит конем с 28 полей. Но ведь есть еще 35 полей, на которых конь может стоять так, что ферзь его ие бьет и ои ферзю не угрожает. Значит, наши шансы не равны, величина их отношения равна $3 : 28 = 5 : 4$ не в вашу пользу...

Некоторое время мистер Фиджит молчал, потрясенный и аргументами собеседника и явной неблагосклонностью судьбы к намерениям Фиджита.

— Все-таки странно,— пробормотал он наконец,— ведь на первый взгляд все должно было идти иначе...

КАК ВАСИЛИЙ ДУМАТЬ УЧИЛСЯ

Происходило все это совсем недавно.

Подрастал в одной семье сын Василий. Вместе с ним подрастали сестры, братьев у Василия не было. Баловали все единственного мальчика в семье, души в нем не чаяли.

Рос он быстро, стал крепким, красивым подростком. Появились у него и сила, и ловкость. Был он общительным, охотно трудился, помогал другим.

А вот учиться Василий не любил. Грамоту и счет он постиг, а более сложное учил неохотно. Ломать голову над трудными вопросами не хотел.

Огорчало это мать, и она часто говорила ему:

— Зря теряешь, Вася, время. Без знаний трудно тебе придется, сынок...

Но Василий только отшучивался и убегал.

Был у него верный друг — пес Шарик. С ним Василий охотно играл, убегал в поле или лес. Старался Шарик держаться поближе к Василию, провожал его в школу и из школы, ночью спал у постели друга.

Дивились люди необычайной сообразительности собаки: и сбегает домой, принесет нужную Василию вещь, и лает, предупреждая об опасности, и покажет самую удобную дорогу. Казалось, что Шарик понимает хорошо каждое слово Василия.

Но никто, кроме Василия, не знал главного: Шарик умел разговаривать.

Когда рядом был только Василий, Шарик беседовал с ним. И тоже уговаривал его взяться за ум, учиться.

— Ох, Вася, наживешь ты беду. Не любит тебя Чуенитна...

— А это кто же такой?

— Это, Вася, страшная сила. Сердится он на тебя за то, что получать новые знания не стараешься. А уж если он разгневается, жди беды, и большой. Да и нас с тобой он разлучит...

— По имени это какой-то божок — не то индийский, не то персидский... Да только напрасно ты меня, Шарик, пугаешь. Никого я не боюсь. И ничего мне не будет. Не хочется мне сидеть за книгами, вот и не сижу...

Пошли они как-то в лес за грибами. Взял Василий ведро, Шарик в зубах лукошко держит. Только день какой-то неудачный получился. Полдня проходили, а почти ничего на нашли.

Вдруг вышли они из зарослей. Прямо перед ними остров большой, по форме прямоугольный. Весь зеленью покрыт, грибов и ягод так видимо-невидимо. Канава вокруг острова не очень широкая, а все-таки перепрыгнуть не удастся. Вода в канаве грязная, так что лезть в воду не хочется.

— Эх, досада, — говорит Васлий, — вот куда попасть бы... А так придется с пустыми руками возвращаться. Засмеют меня дома сестры...

— Да этого острова здесь вообще никогда не было, — говорит

Шарик, — это все шутки Чуенитны... Погоди, я поищу, на чем переправиться.

Полез Шарик в кусты и вскоре позвал Василия.

Нашел Шарик две доски — толстые, широкие. Подтащили Василий с Шариком доски к берегу, столкнули в воду. Оказались доски немного коротковаты: длина доски равна ширине канавы.

— Не годятся, — вздохнул Василий. — Если бы чуть длиннее, положили бы их так, чтобы концы на берегах лежали, и перешли канаву. А так — не выйдет.

— Ты все же подумай, Вася. Досок-то две...

— Ну, и что. Связать-то их нечем. А плот из двух досок не получится.

— А может, в другом месте удастся?

— А какая разница, где переправу строить? Ширина канавы везде одинакова...

— А если доски иначе положить?

— Ох, Шарик, Шарик, не знаешь ты геометрии. Ведь если проложить переход не поперек канавы, а наискось, то еще бо́льшая длина потребуется. А если на повороте канавы... Вот смотри...

Василий нарисовал прутиком на песке край острова (рис. 11).

— Если сделаем переход от A до B, то переход будет больше ширины канавы примерно на две пятых...

— Но у нас же две доски...

— Так их же не свяжешь вместе... Хотя... Если положить одну доску перпендикулярно AB, а вторую — от середины первой доски до B. Надо бы посчитать, хватит ли... Да ладно уж, просто попробуем сделать. Авось выйдет.

Они положили доски (рис. 12) и осторожно перешли на остров.

Там действительно оказалось очень много грибов и ягод, и друзья, весьма довольные прогулкой, вернулись тем же путем.

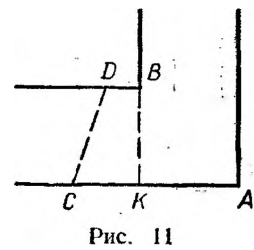


Рис. 11

Рис. 12

Дома Василий рассказывал сестрам об удачной переправе и хвастался:

— Вот, говорят, нужно знать геометрию и тогда найдешь правильное решение. А я без всякой геометрии пристроил доски и перебрался на другой берег. Зачем мне геометрия? Обошелся без нее и дальше буду обходиться.

Он снял с полки учебник, мгновенно разорвал его на несколько частей и выбросил в окно. Все так и ахнули. А Шарик даже глаза закрыл...

— Вот видите, выбросил ее. И не буду терять времени на все эти теоремы! — выкрикнул Василий и вышел из дому.

Тут он вдруг заметил, что Шарика рядом с ним нет. Он позвал собаку, но Шарик не откликнулся.

— Ничего, догонит, — подумал Василий, — никуда он не денется...



Но Шарик не догнал его. Не появился он и к ужину. Напрасно Василий звал своего друга. Лег Василий спать, с грустью глядя на коврик у кровати, на котором обычно проводил ночь пес.

Ночью ему вдруг послышался лай, и знакомый голос зашептал:

— Я же тебе говорил, что разлучит нас Чуенитна, если разгневается. Ищи меня, Вася, да только помни: пока думать не научишься, меня не разыщешь...

Василий оглянулся: никого рядом не было. «Наверное, почудилось», — подумал он, повернулся на другой бок и попытался уснуть.

Но утром он припомнил ночной шепот.

— Пойду искать Шарика, не могу без него, — заявил он матери и сестрам, взял свое нехитрое снаряжение и зашагал в сторону леса.

Никакого плана поисков у него не было. Он не представлял себе, в какой стороне искать Шарика. Просто он пошел по той же тропинке, по которой возвращался вчера с Шариком домой.

Но то ли он сбился с пути, то ли дорога изменилась, но пошли места совершенно незнакомые. Часа через два он вышел на лужайку. На краю ее Василий заметил два небольших домика, перед одним из них у столика сидел старичок и что-то писал.

Подойдя поближе, Василий заметил, что перед стариком не только бумажные листы, но и доска, похожая на шахматную. На ней стояли

одинаковые фигуры. Старик как-то передвигал фигуры по доске и записывал.

Василий вежливо поздоровался и спросил, почему старик играет в шахматы сам с собой: неужели нельзя найти партнера?

— Нет, молодой человек, — спокойно ответил старик, — это не шахматы. Доска не восемь на восемь, как в шахматах, а десять на десять. На доске стоят десять ладей одного цвета, так что это не игра двух противников. Просто я расставляю эти ладьи на доске так, чтобы ни одна не била другую.

— А как они могут бить одна другую?

— Как в обычных шахматах. Ладьи могут перемещаться на сколько угодно полей либо по горизонтали, либо по вертикали. Так что, если, например, поместить все ладьи по большой диагонали, то ни одна не будет бить другую.

— Значит, задача уже решена? — спросил Василий. — Тогда что же вы ищите?

— Найти одну расстановку просто. Я же хочу узнать, сколько вообще может быть таких расстановок. Чтобы не перепутать, я записываю, как были расставлены ладьи в каждом случае. Получив расстановку, я сверяю с записями. Так запас правильных решений растет.

— И сколько же всех расстановок? — осторожно спросил Василий.

— Пока не знаю, но, конечно, много. На маленькой доске я бы легко все нашел. Если бы клеток было 9, то расстановок было бы 6. Вот я сейчас изображу их на бумаге (рис. 13).

Для доски в 16 клеток расстановок уже 24. А на этой доске 100 клеток. Поэтому я не надеюсь быстро найти все возможные расстановки...

— И давно вы их ищите?

— Пятый год. Но дело продвигается, хотя на проверку уходит много времени: нельзя записывать решение, не убедившись, что такого еще не было.

— А нельзя ли как-нибудь иначе узнать это число. Вдруг времени потребуется слишком много... — Тут Василий запнулся, поняв, что намекает на то, что старик может умереть, не окончив вычислений. — И даже бумаги может не хватить...

— Бумаги-то хватит, — улыбнулся старик, — весь домик заполнен бумагой. Времени, конечно, жаль, но как же иначе узнать число решений задачи...

— Но разве обязательно находить все эти расстановки? Неужели нельзя действовать более... как это... математически?

Рис. 13

— Ну, что же, если молодой человек привык рассуждать математически, можно попытаться...

— Да нет, я не любитель математики и не очень умею рассуждать... — Василий вспомнил вчерашний вечер, ему ясно представились закрытые глаза Шарика, когда Василий рвал учебник геометрии. — Но я могу попробовать, если что-нибудь получится...

Старик отодвинул свои записи и взял чистый лист бумаги.

— Начнем с более простой задачи, — предложил он, — возьмем доску не в 100 клеток, а четыре на четыре. Перенумеруем ее горизонтали — 1, 2, 3, 4. Первую ладью можно поставить в первом столбце на любую из четырех горизонталей. Значит, для нее есть четыре возможности. Для второй ладьи возможностей окажется меньше: ведь одна горизонталь уже занята. Поэтому для первых двух ладей найдется расстановок $4 \cdot 3 = 12$. Для третьей ладьи из четырех горизонталей свободными окажутся каждый раз две. Следовательно, для трех ладей расстановок $12 \cdot 2 = 24$. Но расставив три ладьи, мы оставляем для четвертой единственную возможность. Итак, расстановок 24. Если помните, я называл это число раньше.

— Но ведь так, наверно, можно рассуждать и для большего числа ладей? — заметил Василий. — Если мы возьмем доску пять на пять и поставим ладью на одну из горизонталей пятого столбца, то для четырех ладей останутся четыре горизонтали, т. е. их можно будет расставить 24 способами. Но ведь для пятой ладьи есть пять различных положений в этом столбце. Значит, общее число расстановок $24 \cdot 5 = 120$.

— Правильно, юноша. Значит, для шести ладей будет $120 \cdot 6 = 720$ расстановок, для семи $720 \cdot 7 = 5040$, для восьми $5040 \cdot 8 = 40\,320$, для девяти $40\,320 \cdot 9 = 362\,880$, для десяти $362\,880 \cdot 10 = 3\,628\,800$ расстановок. Многовато... Перебрать все их прямо на доске с записью на листах требует много времени...

— Сейчас прикину, — сказал Василий. — Если расходовать на одну расстановку с проверкой записи минуту, то уйдет 3 628 800 минут, т. е. 60 480 часов. Если работать по 12 часов в день, то уйдет 5040 дней, т. е. 14 лет... Но такую каторжную работу по 12 часов в день без выходных едва ли выдержишь...

— Пожалуй, верно. К тому же минуты на расстановку с проверкой по записям не хватит...

— А сколько бумаги ушло бы?.. На листе получается строчек тридцать. Значит, потребовалось бы более 120 тысяч листов... Если сложить в стопку, получится столб в 6 раз выше высокого человека...

— Ну, ладно, — прервал его старик, — спасибо за помощь!

— За какую помощь? — искренне удивился Василий. — Вы сами все сделали...

— За идею. За правильную мысль о том, что не всегда следует искать решение задачи опытным путем, полезно применить науку, размышлять...

Василий простился со стариком и пошел дальше. Оглянувшись, он не увидел на лужайке ни старика, ни домиков, у которых сидел старик...

Дорога вывела Василия из леса. Он подошел к реке и, пройдя по мосту, оказался вблизи небольшого городка.

На тихих улицах жителей было мало. Малыши играли у кучи песка, взрослые куда-то спешили.

И тут Василий вспомнил, что утром, торопясь, он наскоро поел и не взял с собой еды на дорогу. И сразу ему захотелось есть.

Нащупав в кармане несколько монет, Василий подошел к мужчине и спросил, где здесь можно было бы поесть и отдохнуть.

Тот удивленно взглянул на него.

— Вы, наверно, здесь впервые. Вам нужно в дом отдыха смекалистых. Пройдите два квартала прямо, поверните направо, сразу туда и попадете.

Удивился Василий. Зачем ему в дом отдыха? Ему бы только перекусить и дальше идти, авось где-нибудь обнаружит своего верного Шарика... Но мужчина быстро ушел, спрашивать было некого. Ни магазинов, ни столовых не было видно. И Василий пошел искать дом отдыха.

Это оказалось громадное здание, украшенное лепными фигурами. Перед домом отдыха цвели многочисленные клумбы, за ним раскинулся сад. Над входом действительно было написано «Дом отдыха для смекалистых».

Теперь уже Василий понял, что попал не туда, куда следует. К смекалистым его никогда не причисляли, да и он сам не любил долго размышлять...

Неизвестно, сколько бы он простоял перед входом, но вдруг двери сами распахнулись и послышался приятный голос:

— Ну, что же вы стали, молодой человек? Входите смелее, мы рады гостям...

Он вошел и сразу остановился. Он попал в большую светлую комнату. В глубине стоял стол, за ним сидела пожилая женщина в светлой форме. По обе стороны стола находились высокие шкафы со стеклянными дверцами. Вдоль стен и у стола стояли кресла.

— Ну, что же остановились, проходите. Сейчас мы определим вам место и покормим с дороги...

Но Василий уже ясно понимал, что мелочь в его кармане не годится для пребывания в этом роскошном доме отдыха. Он приготовился извиниться за ошибочное вторжение, но, словно угадав его мысли, женщина снова обратилась к нему:

— Вы что, испугались, решили, что у нас все очень дорого? Ничего подобного. У нас для смекалистых все бесплатно!

И когда Василий подошел к столу, продолжила:

— Вы к нам надолго? По какому делу, если не секрет?

— Друг у меня пропал, ищу его...

— Значит, еще не знаете точно, на сколько дней. Однако это не важно. Ищите его, сколько потребуется. Куда же вас поместить? Вид у вас спортивный... А что, если поместим вас в спортивный корпус? Не возражаете? Отлично. Каким видом спорта занимаетесь?

Чувствовавший себя неловко Василий решил прекратить этот град вопросов и отрубил:

— Биатлоном!

Он был уверен, что этот вид спорта ей (как, впрочем, и ему) почти не знаком. Но женщина не удивилась.

— Ну что ж, есть у нас номера и для биатлонистов. Оба они свободны.

Подойдя к шкафу, она достала и положила перед Василием две карточки:

НИКИТА ЛИБКИН БИАТЛОН	ЛЕОНИД ЛОБОИН БИАТЛОН

— У нас каждый, кто жил здесь хоть один день, оставляет после себя такую визитную карточку. В ней записываются имя, фамилия и далее вид спорта, которым человек занимается, или профессия, или город, где он живет... Записанные числа означают сложение: два первых числа — слагаемые, третье — их сумма. Каждая буква в записи означает некоторую цифру. При этом разные буквы означают разные цифры, а одинаковые — одну и ту же цифру.

Когда вы будете уезжать от нас, то тоже оставите визитную карточку для тех, кто приедет после вас. А сейчас, чтобы занять комнату, расшифруйте одну из этих карточек.

Василий смотрел на карточки, ничего не понимая. Он снова мысленно ругал себя за то, что зашел в этот дом отдыха. Поискал бы лучше, наверняка нашел бы в городке место, где можно поесть. А теперь нужно стоять и делать вид, что ты смекалистый...

Однако где-то прозвучал собачий лай, чем-то напоминавший лай Шарика. Василий опустился в кресло и взял вторую карточку в руки.

— Значит, здесь сложены два шестизначных числа — «ЛЕОНИД» и «ЛОБОИН», — шептал он, — а их сумма — семизначное число. Постой, постой, значит, первая цифра суммы — единица. Выходит, что Б = 1... В последнем столбце Д + Н = Н. Значит, Д равняется нулю... Какое же Л? Чтобы был переход в первом столбце, Л должна быть не меньше 5. Но Л не 5, иначе И получилось бы 0 или 1, а этого не может быть... Если Л = 6, то под ним 2 или 3. Но если И=3, то О равняется 6, т. е. Л и О — одинаковые цифры. Если же И = 2, то О = 4. Тогда Н + О = Л означает, что Н = 2 = И. Поэтому Л не 6... Если Л—7, то И—4 или 5. Но 5 не годится, в этом случае О — нуль, а нуль — это Д. Если же И = 4, то О = 8... Равенство О + Б = Т с учетом перехода даст Т = 0, чего не может быть...

Василий перевел дух. Впервые в жизни он с таким вниманием решал сложную задачу и не думал ни о чем, кроме ее условия...

— А имеет ли эта запись вообще решение? — мелькнула у него тревожная мысль. — Нет, наверно, имеет, иначе запись забраковали бы... Если Л = 8, то И = 6 или 7. Если И = 6, то О = 2, Н = 5, Т = 3... А как же со сложением Е + О = А? Остались неиспользованные цифры 4, 7, и 9. Значит, Е = 7, А = 9. Решено!..

Он проверил, что И = 7 и И = 8 не дают решения, и написал на визитной карточке:

$$\begin{array}{r} 872560 \\ 821265 \\ \hline 1693825 \end{array}$$

Женщина, улыбаясь, кивнула ему.

— Вот вам ключ от вашего номера. Это прямо по коридору. Как только отдохнете, направитесь в ресторан. Он чуть дальше на том же этаже...

Василий, поблагодарив, пошел по коридору. Сидеть в номере ему не хотелось, и он прямо направился в ресторан.

Свободных мест Василий сразу не заметил, но сидевший у окна темноволосый юноша поднял руку, приглашая его к своему столику.

— Только сегодня приехал? — спросил юноша. — Ну, давай знакомиться. Меня зовут Зурабом. А тебя?

Зураб заказал обед, и новые знакомые сытно поели.

— А что будем делать теперь? — спросил Зураб у Василия.

Видя, что тот замешкался с ответом, Зураб пригласил Василия в свой номер.

— У меня на десерт занимательная семейная история...

Василий ничего не понял, но последовал за Зурабом.

Когда они вошли в комнату, занимаемую Зурабом, и уселись в кресла, Зураб достал листок бумаги и стал объяснять Василию:

— В 1767 г. в день рождения деда, когда за столом собрались многочисленные родственники, Петр спросил, сколько лет каждому из членов этой семьи. Именинник ответил, что у двух его старших братьев возраст в 5 раз больше суммы цифр года рождения. У именинника же через 3 года возраст будет только в 4 раза больше суммы цифр года рождения. У бабушки это произойдет годом раньше, а другой твой дед может сказать это о себе теперь.

У твоего дяди возраст втрое больше суммы цифр его года рождения, а твой отец мог сказать то же о себе в прошлом году. Возраст твоей матери вдвое больше суммы цифр ее года рождения.

Подумав, Петр сказал, что его возраст равен сумме цифр года рождения, брат скажет о себе это в будущем году, а сестра могла сказать это о себе еще в прошлом году.

Сколько лет каждому из членов этой семьи?

Ну как, нравится тебе задача?

Василий смущенно пожал плечами.

— Я таких никогда не решал и не знаю, как их решают...

— Ну, решают-то обычным путем. Составляют по условию задачи уравнение, а затем решают его. Только тут не одно уравнение, а столько, сколько членов семьи... К тому же каждый раз получается уравнение не с одним, а с двумя переменными. Но все равно решить можно. Попробуем, а?

— А может быть, она решается без уравнения?

— Как это без уравнения?

— Ну, проверим, мог ли каждый из них родиться в таком-то году. Например, если бы кто-то родился в 1700 г., ему в день именин

было бы 67 лет. Сумма цифр его года рождения $1 + 7 + 0 + 0 = 8$. Но 67 не делится на 8. Значит, никто из них в 1700 г. не родился.

— Нет, так не пойдет, — твердо сказал Зураб, — если так считать, то придется делать столько проверок, что мы сегодня и не кончим. В XVIII веке таких проверок штук 60, а ведь нужно проверить еще и годы предыдущего столетия...

— Ну, это уже ни к чему.

— Очень даже — к чему! Люди живут по 100 лет, а то и больше. Нет, так делать не будем. Давай уравнения составлять. Это и короче и надежнее.

Василий с явной неохотой взял карандаш и бумагу.

— Ну, пускай кто-то родился в XVIII веке. А в каком году?

— Вот давай и будем вводить обозначения. Пусть цифры года рождения второго деда 1, 7, x, y. Тогда в 1767 г. ему было лет $1767 - (1700 + 10x + y) = 67 - 10x - y$. В условии сказано, что $67 - 10x - y = 4(1 + 7 + x + y)$. Это значит, что $14x + 5y = 35$.

— А где же второе уравнение?

— Второго уравнения не составишь. Но ведь x и y — цифры, т. е. целые числа не меньше 0 и не больше 9. Это и заменяет второе уравнение. Так вот 35 и $14x$ делятся на 7. Значит, и y делится на 7. Поэтому $y = 0$ или $y = 7$. Но при $y = 0$ x — дробное число, а годится $y = 7$, $x = 0$. Значит, второй дед Петра родился в 1707 г. Ему в тот день было 60 лет. Ясно?

— Но он же мог родиться и раньше — в XVII веке...

— Правильно. Проверим и эту возможность. Если цифры года рождения были 1, 6, x, y, то уравнение имело бы вид: $1767 - (1600 + 10x + y) = 4(1 + 6 + x + y)$, т. е. $139 = 14x + 5y$.

Но $5y$ кончается нулем или пятеркой. Значит, 14 должно оканчиваться цифрой 9 или 4. Первого быть ие может, ведь $14x$ — четное число. А второе может быть при $x = 1$ или $x = 6$. Но в этих случаях y больше 9. Значит, второй дед родился не в XVII, а именно в XVIII веке.

— Ладно, — сказал Василий, — попробую так же рассуждать о первом деде. Если он родился в XVIII веке, то уравнение: $1770 - (1700 + 10x + y) = 4(1 + 7 + x + y)$. Раскроем скобки... $14x + 5y = 38$. Здесь x меньше 3, но 1 и 0 не годятся. Ага, если $x = 2$, то и $y = 2$. Он родился в 1722 году!

— Не спеши. Мы ведь не проверили другую возможность.

— Ладно. Если он родился в XVII веке, то уравнение было бы таким: $1770 - (1600 + 10x + y) = 4(1 + 6 + x + y)$. Если упростим, будет: $14x + 5y = 142$. Здесь $14x$ должно кончаться двойкой. Но $x = 3$ мало. Подходит $x = 8$ и $y = 6$. Год рождения 1686... Так какой же из двух подходит?

— Этого мы пока не знаем. Вот найдем возраст других членов семьи, тогда и выясним, пока же считай дальше.

— Составим уравнение для старших братьев деда. Если они родились еще в XVII веке, то уравнение $1767 - (1600 + 10x + y) = 5(1 + 6 + x + y)$, т. е. $15x + 6y = 132$. Это может быть при $y = 2$, $x = 8$ или при $x = 6$, $y = 7$. Опять два ответа ...

— Так ведь братьев двое. Один родился в 1682 г., другой — в 1667 г.

— Но они могли родиться и в XVIII веке. Тогда уравнение: $15x + 6y = 27$. Значит, $x = 1$, $y = 2$. Оба родились в 1712 г. ...

— Что же верно, мы выясним позже. Ищи год рождения Петра.

— Если он родился в XVIII веке, — размышлял вслух Василий, — то уравнение $166 - 10x - y = 3(1 + 6 + x + y)$, т. е. $13x + 4y = 145$. Это может быть... при $x = 9$, $y = 7$. Но если он родился в 1697 г., то его отец не мог родиться ни в 1722 г., ни в 1686 г. Значит, это не подходит... А если отец Петра родился в XVIII веке, то уравнение: $66 - 10x - y = 3(1 + 7 + x + y)$. Иначе... $14x + 4y = 42$. Это может быть при $x = 1$, $y = 7$ или при $x = 3$, $y = 0$, т. е. год рождения 1717 или 1730. В обоих случаях первый дед родился в 1686 г., а его старшие братья — в 1667 и в 1682 гг.

Дальше они вычисляли быстрее, чем вначале, постепенно выяснили то, что не выходило с первого раза. Оказалось, что в день именин Петру было 15 лет, а его брату 19 лет, а сестре 20 лет. Дяде было 35 лет. По уравнениям, матери могло быть либо 26, либо 32, либо 38 лет. Судя по возрасту ее детей, ей было 38 лет. Петиному отцу скорее всего было 50 лет, он едва ли был моложе своей жены. Петиной бабушке было 74 года.

— Ну, вот и кончили, — сказал Зураб. — Правда, интересно?

— Интересно. Только трудно все же. И долго...

— Ну, это с непривычки. Ладно, давай отдохнем. Не хочешь прогуляться по здешнему лесу? Я как-то был там. Великолепный воздух. А какие поляны!

Они спустились к выходу из дома отдыха. До леса и в самом деле было несколько минут ходу.

Зураб уверенно указывал направление.

— Вот тут еще немного левее... Сейчас будет группа старых берез... Здесь будет лужайка — вся в цветах...

Но, видимо, где-то он сбился с дороги. Пошли незнакомые места.

— Кажется, я что-то напутал. Придется возвращаться.

Но вернуться оказалось не так-то уж просто. Зураб и Василий пошли, как им казалось, назад, но вскоре убедились, что идут по местам, где еще не были. А потом оказалось, что они каким-то образом вышли на поляну, которую недавно пересекли, разыскивая обратную дорогу...

— Вот так прогулка, — подумал Василий, — так не только Шарика не разыщешь, а, чего доброго, и сам пропадешь...

— Неприятная история, — сказал Зураб. — Я хорошо помню, что этот лес тянется полосой постоянной ширины. Как-то я пересекал эту полосу, ее ширина две тысячи обычных моих шагов.

— Ну, давай и пройдем по прямой две тысячи шагов.

— А в каком направлении? У меня, кажется, есть компас... Ага, вот он... По прямой мы сможем идти. Но ведь если прямая параллельна краю полосы, то мы сделаем много тысяч шагов, а из леса так и не выйдем...

— А давай так: пройдем немного прямо, а потом повернем...

— Что значит — немного? Сто шагов? Двести? Пять тысяч? А под каким углом мы должны свернуть?

— Вопросы твои, Зураб, правильны. Но это уже получается не прогулка, а геометрическая задача. А геометрию я плохо знаю. Не очень любил я ее...

— Давай все-таки переведем все это на язык геометрии.

— Нужно пройти некоторое расстояние по прямой. А потом повернуть на 90° и пройти еще такое расстояние, чтобы оказаться вне полосы шириной две тысячи шагов.

Вот давай нарисуем на земле. Если мы находимся в точке M, а путь MAB, то нужно найти такую длину стороны MA, чтобы равнобедренный прямоугольный треугольник MAB не поместился внутри полосы.

— Я думаю, что это случится, если высота треугольника, проведенная к гипотенузе, будет равна ширине полосы. При этом длина $|MA|$ окажется около 2830 шагов. Вот так мы и пойдем.

— Подожди, Василий. А может быть, найдется и лучший способ?

— А зачем лучший? Этот же выведет нас из леса...

— А все-таки...

— Ну, если попробовать делать поворот на другой угол. Компас же у нас имеется... Если повернуть так, чтобы треугольник MAB оказался равносторонним... Ну, устно я не посчитаю... Наверно, длина стороны MA окажется процентов на 15 больше ширины полосы... Значит, если мы пройдем по прямой 2300 шагов, а затем повернем на 120°, то через 2300 шагов обязательно окажемся за пределами леса...

— Вот видишь. Это уже короче, чем в первом варианте. Вероятно, есть и лучшие варианты. Только двигаться по тем маршрутам сложнее.

Они прошли 2300 шагов, повернули и вышли из леса значительно быстрее, чем предполагали. Оказались они около самого дома отдыха.

— Смешная история, — сказал Зураб, — заблудились около дома отдыха...

И тут Василий вспомнил свой последний поход с Шариком. «Это все шутки Чуенитны», — сказал тогда Шарик. «Не обошлось без него, наверно, и здесь», — подумал Василий.

— В общем, геометрия нас немного выручила, — сказал он, — без нее мы, пожалуй, так просто не выпутались бы...

Они попрощались, условившись встретиться за ужином.

В номере Василий привел в порядок одежду и ботинки, принял душ. День оказался нелегким, и, усевшись в кресло, Василий задремал.

Но едва он закрыл глаза, как услышал знакомый голос Шарика:

— Ты сегодня хорошо потрудился и кое-чему научился.

— Ничему я особенно не научился...

— Тут ты ошибаешься, Вася. Во-первых, ты убедился, что без математики не обойтись. Во-вторых, ты понял, что нужно рассуждать, используя математические факты. Без рассуждения старик на поляне еще много лет расставлял бы фигуры на доске, а ты с Зурабом еще долго блуждал бы по лесу... В-третьих, ты кое-что узнал.

— Знаю-то я еще маловато...
— Это не беда. Чуенитна на тебя не за это разгневался.
— В который раз слышу: Чуенитна. Кто это в конце концов?
— А прочти его имя иначе и поймешь. Ведь он сердился не за то, что ты мало знаешь, а за то, что не хотел больше узнать, не задумывался...
— Ну, это я теперь понимаю.
— Вот почему он больше и не гневается. Можешь возвращаться. Дома и знания получишь, и меня найдешь...
Открыв глаза, Василий увидел, что он один в номере.
В ресторане он подошел к столику Зураба. Тот что-то писал.
На вопрос Василия Зураб объяснил, что утром уезжает. Поэтому он должен подготовить свою визитную карточку.
— Вот написал, да не совсем удачно.
И он показал запись: «ЗУРАБ БУФИР ФУТБОЛ».
— Здесь все правильно. Можно установить, что Ф = 1, З = 3, Б = 9, Р = 8, У = 2, Т = 4, Л = 7 и О = 6. Но вот для А и И можно брать 0 и 5 как угодно. Получаются два варианта. Видно, придется или указать другой вид спорта, или вместо спорта написать свой город...
— Я, наверно, тоже завтра уеду. Значит, и мне писать карточку нужно.
И он написал: «ВАСИЛИЙ ТАТИЛИН БИАТЛОН».
Зураб хотел помочь ему в проверке, но Василий пожелал решить самостоятельно. Он сразу установил, что Й = 0, Л = 9, а И больше 5. Испытав значения И, он убедился, что его карточка имеет единственное решение: 1 846 960 + 3 836 967 = 5 683 927.
...Обратный путь Василия оказался простым и коротким. А когда он вышел из леса, то увидел рядом с собой Шарика...

СЕРЫЙ ДЖИНН — ПОХИТИТЕЛЬ ЯБЛОК

Далеко на востоке в предгорье раскинулась богатая страна.
Много лет правил страной царь Навруз. Имел он войско могучее, и никто из соседей и не помышлял о нападении на это царство. Столица царства славилась великолепными зданиями, широкими мощеными улицами, множеством садов и цветников.
Царская сокровищница была полна золотом и серебром, дорогим оружием и драгоценными камнями. Но старый царь редко заглядывал в сокровищницу. Куда больше он интересовался и гордился своими садами, особенно яблоневым. Когда начинался сбор плодов, старый царь сам следил, чтобы ни одно яблоко не пропало, не было повреждено.
Дело в том, что яблоки в царском саду были не только красивы и вкусны, но и обладали целебными свойствами. Сок их обеспечивал долголетие.
Но однажды вбежал во дворец старый садовник и упал перед троном.

— О, великий царь, — заговорил он, не поднимая головы, — я сознаю, что достоин самой позорной смерти, но разреши мне рассказать, как было дело.
— Что случилось? — спросил удивленный царь. — Кара, если ты заслужил ее, не минует тебя. Расскажи толком, в чем дело.
— Вот уже месяц, как яблони в твоем саду, о владыка, покрываются чудесными плодами. Яблоки достигли своих размеров, стали румяными и восково-желтыми. Вот-вот придет время сбора урожая. Я уже приготовил корзины и готовился пригласить тебя в сад...
— Все это бывает ежегодно, — перебил садовника царь, — переходи же к делу.
— Три дня назад я обходил утром сад, выбирая, с какой же яблони начать сбор. И вдруг я обнаружил, что на одной из яблонь нет ни одного плода. Перед этим ветви были полны яблок, а теперь я не видел ни одного...
— Этого не может быть! — воскликнул царь. — Сад так охраняется, что никто, кроме меня и тебя, не входит туда.
— Я тоже не поверил своим глазам, — продолжал садовник. — Но на земле не было ни одного яблоневого листка, на траве — следа человека... Я страшно испугался и не посмел донести тебе о случившемся. Но в следующие дни все повторилось: так же таинственно исчезли плоды еще с двух яблонь. Сегодня ночью я не ложился спать, ходил по саду, присматривался, не увижу ли дерзких похитителей...
— И что же?
— Перед рассветом мне почудилось какое-то движение у дальней ограды. Я поспешил туда. Когда я уже подбегал, с одного дерева взлетела вверх какая-то огромная птица и исчезла в небе. А на яблоне не оказалось ни одного плода.
Я разорвал на себе одежды в отчаянии. Когда взошло солнце, я еще раз взглянул на опустевшее дерево, привел себя в порядок и поспешил во дворец. Вели меня казнить, о великий царь, за то, что я не сумел сохранить драгоценные плоды твоего сада...
— Если ты говоришь правду, то казнить тебя не за что, — медленно сказал царь. — Встань и иди в сад. А я подумаю, что сделать, ибо случившееся меня весьма огорчает. К тому же похититель может вернуться и попытаться утащить плоды и с других яблонь.
Узнав о случившемся, царские советники пришли в ужас и единодушно решили, что это дело рук каких-то джиннов. Но никто не смог предложить хорошего плана защиты сада.
Тогда царь отпустил советников и призвал своих четырех сыновей. Юноши тотчас же явились и, услышав о похищении яблок, предложили свои услуги по охране сада. Царь согласился с сыновьями и велел им поочередно дежурить по ночам в яблоневом саду.
Однако дело не улучшилось. Три ночи сторожили царевичи сад, держа наготове оружие, чтобы сразить дерзких похитителей. Но никого они не увидели, а поутру оказывалось, что каждый раз была очищена от плодов еще одна яблоня.
Настала очередь младшего царевича — Баноя. Перед тем как идти в сад, он долго размышлял: куда же намерен направиться сегодня

ночью вор? Он представил себе расположение яблонь в саду. Деревья были посажены в восемь рядов, в каждом ряду по восемь яблонь. Царевич начертил план сада, получились 64 квадрата, как на шахматной доске. Затем он отметил деревья, плоды которых были украдены: второе в первом столбце, четвертое во втором столбце, шестое в третьем столбце, восьмое в четвертом столбце, третье в пятом столбце, первое в шестом столбце, седьмое в седьмом столбце... Вор не бывал дважды ни в одном столбце, ни в одном ряду... Если и дальше будет так, то он попытается добраться до пятой яблони в восьмом ряду...

Баной даже побледнел. Неужели он догадался, где ждать вора? Он еще раз посмотрел на свой план сада. Расположение обворованных яблонь напомнило ему какую-то задачу... Да, так располагаются фигуры в одном из решений шахматной задачи: расставить на доске восемь ферзей так, чтобы ни один из них не мог бить другого... Так оно и есть...

Окончательно решив, что вор появится именно там, царевич велел принести густые сети. Одной из них он покрыл намеченное дерево, другие расстелил на земле вблизи дерева. Сделав это, он отошел в сторону и стал терпеливо ждать.

Едва сад окутала темнота, как царевич услышал шум. Сверху на яблоню опускалось огромное крылатое существо. Опускалось быстро, уверенно. Видимо, так оно поступало уже не один раз...

Но, опустившись на яблоню, птица тут же запуталась в сети. Пытаясь освободиться, она только еще больше увязала и вскоре затихла, прекратив борьбу. Царевич подошел к дереву и осторожно стянул на землю сеть с добычей. При этом он повредил немало веток, сорвал несколько яблок, но сейчас это его не беспокоило. Ведь главное было сделано: вор пойман! Никто уже не посмеет лезть за царскими яблоками!

Он попытался при свете луны рассмотреть пойманную птицу. Та повернула в его сторону голову и вдруг заговорила:

— Отпусти меня, Баной. Дай мне спокойно умереть на воле.

— Как это отпустить тебя? Ведь ты осквернила наш сад, утащила отсюда сотни самых лучших яблок... Нет, я сейчас позову стражников, и мы отнесем тебя во дворец. А утром царь — мой отец Навруз — решит, как быть с тобой...

— Я не доживу в царской темнице до утра, — сказала пленница.— А яблоки я срывала и уносила не для себя, а по приказу могучего серого джинна. Отпусти меня, и я расскажу тебе, как найти джинна и как заставить его вернуть похищенные у вас плоды.

Баной заколебался. Конечно, хорошо бы показать вора отцу. Но если и в самом деле птица умрет, то с ней умрет и след похищенных яблок... И он пообещал, что отпустит птицу.

— Я верю тебе, царевич. Серый джинн находится в глубине гор, в десяти днях пути отсюда. Если выехать из вашей столицы по дороге, ведущей в сторону восходящего солнца, то, поднявшись к перевалу, увидишь три дороги. Левая дорога ведет в царство серого джинна. Дорога сложная, придется несколько раз пересекать быстрые горные реки. Встретятся там и джинны-слуги серого джинна. Только они ни-



чего плохого тебе не сделают. Серый джинн могуч и верит в свою мощь, он даже помогает тем, кто хочет добраться до него, чтобы помериться силами.

Он хитер, любит искусство счета. Если, добравшись туда, покажешь себя искусным в счете, он отдаст все, что взял у вас...

— Выходит, что я должен отправиться к нему и просить вернуть то, что он украл у нас? Нет, я не стану беседовать с ним мирно. Только бы добраться до него...

— Не горячись, Баной. Не все решается силой оружия. А теперь отпусти меня, как обещал...

Баной развязал сеть и помог пленнице освободиться. Она мгновенно исчезла. И только ветки, листья и яблоки на земле напоминали о том, что тут произошло...

Узнав утром, как Баной поймал похитителя и разузнал дорогу в царство серого джинна, братья решили немедленно отправиться по этой дороге. Они уверяли отца, что быстро расправятся с врагом и заставят его не только вернуть яблоки и дать клятву не сметь вторгаться во владения царя Навруза, но и заставят его платить дань.

Царь похвалил Баноя за наблюдательность и смекалку, одобрил желание сыновей сражаться с врагом, однако отказался пустить всех четверых. По его мнению, достаточно было поехать двум старшим братьям.

И назавтра два брата выехали. Попрощавшись с отцом и с остающимися братьями, юноши подошли к кустам роз. По старому обычаю, в честь рождения каждого царевича у левого крыла дворца высаживали розовый куст. Теперь здесь пышно цвели четыре куста. Царевичи привыкли к своим кустам и не раз подходили к ним, любуясь красотой и вдыхая нежные запахи. Но никто из них не знал волшебных свойств кустов: цвели розы до тех пор, пока с юношами не случалась беда...

Старый Навруз знал это и следил, чтобы, уезжая из дома, сыновья всегда прощались со своими кустами.

Погладив цветы, царевичи сели на коней и поехали по восточной дороге.

Два дня юноши спешили, делая только короткие остановки, чтобы покормить лошадей, дать им немного отдохнуть и заодно поесть самим. К концу второго дня дорога внезапно оборвалась. Перед братьями оказалась глубокая бурная река. Моста не было.

Откуда-то сбоку появился великан — вдвое больше каждого из братьев.

— Сходи с коня и прыгай, как конь! — крикнул он братьям.

Те не поняли. Гигант снова крикнул то же самое. Братья сошли с коней. И сразу перед ними возникла большая шахматная доска на земле. В каждой клетке ее стоял номер — 1, 2, 3...

Великан громко велел братьям поочередно становиться на клетку с номером 1 и прыгать по доске ходом шахматного коня. Становиться на одну клетку дважды нельзя. После того как побывают на всех клетках, царевичей сразу перебросят на другой берег...

Не видя другого выхода, старший брат ступил на первое поле и начал перемещение. Однако запомнить, на каком поле он был, а на каком еще не был, он не смог, и вдруг раздался громкий голос: «А здесь ты уже был!» И старший брат неожиданно исчез.

Второй царевич решил быть осмотрительнее. Совершая прыжки, он делал заметки на платке. Но, видимо, где-то он выбрал дорогу неверно, потому что после пятидесяти одного прыжка оказалось, что его следующий ход ведет только к таким клеткам, где он уже побывал. И едва он сделал этот прыжок, как прозвучали те же слова, и второй царевич исчез.

А царь, увидев, что два куста роз неожиданно увяли, понял, что с сыновьями случилась беда. Позвав оставшихся сыновей, он сказал им, что старшие братья, видимо, попали в беду, нужно спешно ехать вслед за ними. Только теперь придется думать не столько о яблоках, похищенных серым джинном, сколько о том, чтобы узнать, что же случилось с братьями, и как им помочь. Братья живы: если бы они погибли, цветы с их кустов осыпались бы...

И утром младшие братья — Гуджат и Баной выехали по той же дороге.

Когда на второй день они увидели пасущихся нерасседланных коней, то поняли, что здесь и произошло несчастье с братьями. Но размышлять долго царевичам не пришлось. Великан заставил и их начать прыжки по доске.

Баной предложил Гуджату не спешить, подумать, как же побывать на всех клетках площадки, но тот отмахнулся: нельзя терять время на долгие размышления, нужно побыстрее преодолеть препятствие... Он начал свои перемещения быстро, но вскоре стал останавливаться, вспоминая, был ли уже на некотором поле. Все же он окончил прыжки благополучно. Едва Гуджат ступил на последнюю клетку, как взвился в воздух и очутился на другом берегу. Сразу же там оказался и его конь.

Баной расчертил свой платок на клетки, разделил полученную доску на 16 квадратов и начал намечать обход так, чтобы после пятнадцатого прыжка оказалось, что он побывал по одному разу в каждом квадрате. Затем он побывал в них еще по разу. После нескольких попыток Баной нашел правильный путь. Держа в руке свой платок и поглядывая на него, он смело начал движение. Очень скоро он оказался рядом с братом.

Оглянувшись на место, где исчезли братья, юноши продолжили путь.

К вечеру они подъехали к широкой реке.

— Не беда, брат, — воскликнул Гуджат, — я вижу лодку.

Но когда они спустились к воде, оказалось, что лодка закреплена. Довольно массивный замок удерживал лодку на цепи.

У братьев мелькнула мысль о том, что можно было бы пустить в ход силу и попытаться сбить замок, но неожиданно рядом с ними появился великан и не очень вежливо спросил, что им здесь нужно.

— Нам нужна лодка для переправы, а еще лучше бы—плот, чтобы и коней перевезти на тот берег.

— Никакой плот не требуется. Эта лодка достаточно велика и может выдержать и вас, и ваших коней. Только требуется принести ключ к ее замку.

— А где же его взять?

— Идите за мной.

Он подвел их к небольшой башенке. От нее расходились под прямым углом две дорожки, далее они поворачивали и образовывали треугольник. В местах поворотов высились небольшие башенки. Внутри треугольника, ограниченного дорожками, была ярко-зеленая круглая лужайка, касавшаяся сторон треугольника. В ее центре высилась такая же башенка, как по углам.

— Нужно добраться до этих башен. В каждой из них ключи. Один из них берете и — к следующей башне. Двигаясь от башни к башне, вы принесете ключ, которым можно открыть замок этой лодки.

— А в каком порядке побывать у башен? — спросил Баной.

— Это дело ваше. Нужно только успеть за положенное время. Я вынесу водяные часы и пущу их. Нужно успеть вернуться раньше, чем вода вытечет...

— Брат, побегу я, — зашептал Гуджат, — я бегаю быстрее тебя.

— Погоди, я сперва определю, как лучше бежать. Тут ведь несколько путей, все они разной длины...

Он что-то рисовал на песке и вскоре уверенно заявил:

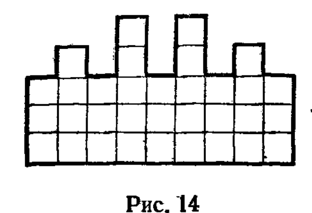


Рис. 14

— Бежать нужно по одному из катетов, затем подбежать к внутренней башенке, потом к третьей башенке и вернуться по другому катету...

Великан вынес водяные часы и установил их на площадке. Гуджат помчался с наибольшей скоростью, на какую был способен.

С опаской глядя на снижающийся уровень жидкости в часах, Баной спросил:

— А если Гуджат не успеет принести ключ к сроку?

— Законы в стране серого джинна неумолимы. Вместе с последней каплей воды из часов исчезнет и запоздалый скороход...

Но Гуджат успел. Он добежал, когда вода еще вытекала тонкой струйкой из отверстия в часах.

Великан недоверчиво посмотрел на братьев, но подвел их к лодке. Через десяток минут царевичи и их лошади были на другом берегу.

Отдохнув и дав отдохнуть лошадям, Баной и Гуджат утром двинулись дальше. Дорога становилась все хуже, вошла в ущелье и наконец уперлась в гигантские ворота, вделанные в скалу (рис. 14).

Слева и справа скалы вздымались круто к небу. Обойти скалу с воротами нечего было и думать. Не имело смысла и лезть по отвесной скале...

— Как же их взломать? — подумал вслух Гуджат.

— Ничего не выйдет, брат. У меня мысль другая. Если бы попасть стрелой в центр, может, поймут, что мы перед воротами, и отворят их...

— А где же их центр? Они какой-то неправильной формы: девять прямоугольников одинаковой ширины, но разной высоты...

— Попробую-ка я вычислить, где у них центр тяжести, — сказал Баной.

Сойдя с коня, он погрузился в вычисления.

— Ворота имеют ось симметрии, — сказал он брату. — Центр тяжести удален от низа примерно на $\frac{16}{25}$ высоты в этом месте...

Гуджат прицелился и выпустил одну за другой три стрелы. Видимо, он угодил в нужное место, и створки ворот медленно раскрылись.

Братья поспешили в открывшийся проход, но были остановлены громовым голосом:

— Это кто еще вторгается в мои владения? А ну, принести их сюда!

На братьев набросились неизвестно откуда взявшиеся крылатые джинны, подхватили их и вместе с лошадьми понесли над землей. Царевичи не видели, куда их несут с огромной скоростью, но через несколько минут их опустили на площадку перед дворцом.

Братья спрыгнули с коней и схватились за мечи, готовые на твердой земле дать отпор обидчикам.

— Оставьте мечи, юноши, — раздался громкий голос, — если бы я хотел вас уничтожить, я сделал бы это давно...

Прямо перед ними на богато украшенном троне сидел гигант в серой одежде. «Верно, это и есть сам серый джинн», — подумал Баной.

— Зачем вы ехали сюда, юноши?

— Мы — сыновья царя Навруза. Ехали мы разыскать серого джинна, который послал своих слуг воровать яблоки из нашего сада. Его посланцы обворовали семь яблонь...

— Ну, я и есть серый джинн. Вот вы и приехали... Стоило ли из-за мешка яблок ехать так далеко?

— Яблоки-то не простые, это всем известно. Да и украли их не мешок, а много больше...

— Ну, если ты любишь счет, юноша, могу тебе подсказать. Число их приближенно равно квадратному корню из наименьшего числа, которое кратно 52 и может быть записано с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Гуджат беспомощно посмотрел на брата. Тот оглянулся, ища, на чем бы писать... И сразу в руках у Баноя оказалась доска, посыпанная песком, заостренная металлическая палочка...

— Число это, — вскоре произнес Баной, — 145 236, корень из него около 381.

— Ну, что ж, верно, — сказал серый джинн. — Можно бы и вернуть их тебе, не больно они и нужны. Но, — он сделал многозначительную паузу, — надо выяснить еще, где они находятся...

Твои яблоки хранятся у одного из четырех служителей дворца. Лекарь и Надир ничего на знают о яблоках. Ашот и стражник знают, у кого яблоки. Садун и гонец прибыли во дворец раньше повара. Бебур и лекарь одного возраста. Повар старше Ашота. Тот, у кого яблоки, второй по возрасту. Так у кого яблоки?

— Это нетрудный вопрос, — усмехнулся Баной, — они у гонца Ашота.

— Ну, раз справился и с этим вопросом, можно и вернуть яблоки. Правда, с еще одним условием. Если ты сможешь разложить их в три кучи с квадратным числом яблок в каждой из них...

— И это нетрудно, — сразу нашелся Баной, — $381 = 19^2 + 4^2 + 2^2$. Впрочем, есть еще одно решение: $381 = 16^2 + 10^2 + 5^2$.

— Верно, — согласился серый джинн. — А что это второй царевич онемел? Или он не имеет понятия о высоком искусстве счета?

— Я не такой любитель математических хитростей, как мой младший брат Баной, — отозвался Гуджат, — но обучали нас одни и те же учителя...

— Так ли? — качнул головой серый джинн. — Ну, если так, то назови мне число, которое кончается цифрой 3 и увеличивается втрое, если эту цифру приписать в начале числа и зачеркнуть в конце.

— Но это число слишком большое, — вмешался Баной, — нужно записывать...

Серый джинн усмехнулся, и сразу у Гуджата появилось, на чем писать. Не очень быстро и не очень уверенно он начал писать и в конце концов пришел к огромному числу 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793.

— Так, так... Значит, я уже сказал, что яблоки вы получите. Это все?

— Нет, о джинн, — сказал Баной, — по дороге сюда ты построил ряд хитроумных ловушек. В одну из них угодили наши старшие братья. Они исчезли. Я думаю, они у тебя. Освободи их.

— Да зачем они тебе? Вас и так много у отца. Когда придется делить наследство, тебе ж без них больше достанется...

— Нет, о джинн, мы не жадные, чужой доли нам не нужно. Жили мы очень дружно. Освободи братьев.

— Сами освободите!

И перед серым джинном появился столик с грудой небольших кубиков.

— Видишь, вот 26 кубиков. Они совершенно одинаковы по виду и по размерам. Внутри одного из них находятся ваши братья. Этот кубик тяжелей остальных. Вот и попробуй с помощью весов без гирь за три взвешивания отыскать этот кубик...

Гуджат шагнул к столику и, не слушая шепота Баноя, начал взвешивать.

Положив на обе чашки по 12 кубиков, он отделил те 12, среди которых был один более тяжелый. Затем он положил из них на чашки по 5 кубиков. Тут он задумался: какой же из пяти кубиков самый тяжелый?

— У тебя осталось одно взвешивание, — напомнил ему серый джинн.

Но Гуджат и сам уже понимал, что поспешил и избрал неверный путь. Последней попыткой его было положить на обе чашки весов по одному кубику. Если бы один из них перевесил, то это и был бы тот, который искал Гуджат. Но кубики казались равного веса.

— Попался! — торжествующе вскричал серый джинн.

И в тот же миг Гуджат исчез, а на столике появился еще один кубик — точно такой же, как остальные.

— Ну, будешь освобождать своих братьев? — обратился джинн к Баною.

— Буду. Только тремя взвешиваниями найти кубики невозможно.

— Если я разрешил искать один кубик тремя взвешиваниями, то для поиска двух кубиков я разрешу шесть взвешиваний.

— А как с весом этих двух кубиков?

— Они одного веса, тяжелее каждого из остальных кубиков.

Баной положил на чашки по девять кубиков. Чашки оказались в равновесии. Заменив на одной чашке кубики лежавшими в стороне, Баной выяснил, что две первые группы содержат по одному тяжелому кубику. Отложив в сторону легкие кубики, Баной с помощью двух взвешиваиий нашел в одной девятке тяжелый кубик. Поступив так же со второй девяткой, он торжествующе протянул оба кубика серому джинну...

— Повезло твоему отцу и братьям, что в семье оказался хоть один смекалистый любитель математической науки... Ну, что ж...

Он хлопнул в ладоши, и перед Баноем оказались его братья. Запыленные, в помятой одежде, но живые и здоровые...

Джинн хлопнул еще раз в ладоши, и перед царевичами оказались семь корзин знакомых им с детства яблок.

— А теперь перебросить их всех в царство Навруза. Да прихватить по дороге их пару коней...

Между тем Навруз, похудевший и осунувшийся за эти дни, сидел перед кустами роз и с ужасом смотрел, как внезапно увяли цветы и на третьем кусте... Вдруг он оживился. Кусты зашелестели, розы распрямились и зацвели, как и месяц назад...

— Неужели все окончилось счастливо? — не верил своим глазам старый царь.

Не прошло нескольких минут, и на площади перед дворцом он увидел сыновей. Они шагали веселые и довольные, а боевые кони их везли за ними непривычный груз — корзины с яблоками...

ПУТЕШЕСТВИЕ МОЛОДОГО МАТЕМАТИКА

Случилось это давно, трудно даже указать, когда именно все происходило.

У старого ученого было несколько учеников. Каждое утро после завтрака все они собирались в саду и, прогуливаясь по дорожкам, беседовали с учителем. Иногда они усаживались на скамейки или заходили в беседку, где продолжали разговор. Беседы их шли о том, как устроен окружающий мир, как он возник, как изменяется. Беседуя с учителем, юноши учились правильно рассуждать, изучали науки, которые теперь называют математикой, физикой, астрономией, биологией, географией, историей...

Во второй половине дня юноши обычно работали в библиотеке, изучая собранные там книги и решая различные задачи.

Так шли годы.

Однажды, когда юноши, как обычно, подошли утром к своему учителю и почтительно приветствовали его, он сказал:

— Вот что, мои дорогие. Мы с вами беседуем ежедневно уже не первый год. Вы многое постигли, многому научились. Были вы прилежными и понятливыми, и я доволен вами. Вы получите от меня письма, удостоверяющие ваши познания, и сможете распоряжаться собой по своему усмотрению. Хочу только знать, что вы намерены делать дальше.

— Я вернусь к отцу, — сказал первый, — у него большое торговое дело, и мои знания найдут применение.

— Наша семья, — сказал второй, — занимается сельским хозяйством, у нас просторные поля, много скота. Управлять всем этим не просто. Найдется дело и для меня.

— Я, — сказал третий, — открою школу и буду обучать детей началам наук.

— Что касается меня, — сказал четвертый, — то думаю, что мои знания пока недостаточны. Я очень люблю математику, но то, что я постиг, — ничтожная доля этой прекрасной науки. К тому же я мало знаю о ее использовании в жизни. Поэтому я намерен совершить небольшое путешествие, познакомиться с применениями математики и при случае поучиться у тех, кто глубже знает ее...

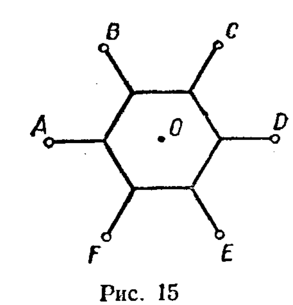


Рис. 15

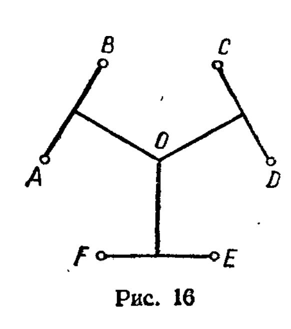


Рис. 16

— Ну что ж, Ронис, — улыбнулся учитель, — я доволен твоим решением.

И вскоре юноши покинули дом своего учителя.

К концу второго дня путешествия Ронис подошел к огромному лесу. На опушке сидела группа людей, перед ними лежали разноцветные карты и планы, неподалеку стояли какие-то инструменты на трехногих подставках. Шел энергичный спор.

Ронис подошел к спорящим, поздоровался и присел около них.

Прислушавшись к их спору, он понял что им поручено какое-то строительство в этом лесу. Спорят они из-за того, что никак не могут найти план работы, который бы всех удовлетворил.

— Не могу ли я чем-либо оказаться полезным? — вежливо спросил Ронис.

— А кто вы по профессии? — спросили его. — Строитель? Землемер?

— Нет, — отвечал он, — я не умею строить ни дорог, ни мостов, ни оросительных каналов. Но я изучал математику и, может быть, поэтому мог бы помочь вам в решении вопроса...

Ссылка на математику не показалась спорившим очень убедительной. Но так как они пока не видели выхода, то решили все же объяснить Ронису, о чем они спорят.

Оказалось, что богатый владелец этого прекрасного леса решил сделать более приятными прогулки и отдых в своем лесу. Построили шесть очень красивых беседок, расположив их в вершинах правильного шестиугольника. Беседки понравились богачу. Теперь он требует создать сеть дорог, чтобы из каждой беседки можно было пройти к любой другой.

Один из строителей предлагал проложить дороги по сторонам шестиугольника, второй предлагал построить дороги от каждой беседки к центру шестиугольника. В обоих случаях протяженность дорог оказывалась одинаковой, но первый уверял, что его вариант лучше, так как по его плану длина перехода от одной беседки к другой в среднем 1,8 a, где a — длина стороны шестиугольника, в то время как у другого длина перехода $2a$. Второй указывал, что зато в первом варианте иногда придется делать переход в $3a$, в то время как у него любые переходы только по $2a$.

Третий предложил иное расположение дорог, считая свой план более красивым (рис. 15). Но общая длина дорог у него составляла $6a$.

Однако владелец требовал, чтобы общая длина дорог была как можно меньше. Тогда и строительство обойдется дешевле, и меньше деревьев придется срубить. Строители сомневались, отвечают ли эти три плана требованию, но ничего иного пока предложить не могли.

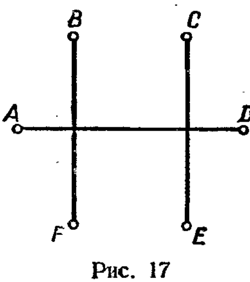


Рис. 17

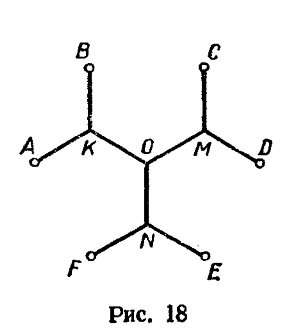


Рис. 18

— Мне кажется, — заметил Ронис, — что общую протяженность дорог можно несколько уменьшить. Давайте отметим положение беседок буквами A, B, C, D, E, F, а центр шестиугольника буквой O. Проложим три дороги по несмежным сторонам шестиугольника — AB, CD, EF, затем соединим середину каждого из этих участков с центром O (рис. 16). После этого можно будет попасть из каждой беседки в другую, а общая протяженность дорог уменьшится. Если раньше предлагали $6a$, то теперь[1] длина дорог составит $3a+\frac{3}{2}a\sqrt{3}$, т. е. примерно $5{,}6a$.

Впрочем, вероятно, можно уменьшить и эту величину. Если проложить дорогу по большой диагонали шестиугольника (например, по $[AD]$, а две — по малым диагоналям, перпендикулярным к ней, то общая длина дорог составит $2a+2a\sqrt{3}$, т. е. около $5{,}46a$ (рис. 17).

— Действительно, — воскликнул один из строителей, — а мы и не додумались. Вот что значит математика!

— А еще короче нельзя? — осведомился другой строитель.

— Я не утверждал, что короче нельзя, — улыбнулся Ронис. — Давайте подумаем. Если середина стороны AB — точка T, то беседки A, B и точка O соединены дорогами $[AB]$ и $[TO]$. Но точки A, B, O — вершины правильного треугольника. Их можно соединить иначе. Наилучший вариант таков: если K — центр треугольника ABO, то сумма длин дорог AK, BK, KO — наименьшая. Если так же поступим с точками C, D, O и E, F, O, то общая длина дорог окажется $3a\sqrt{3}$, т. е. примерно $5{,}2a$ (рис. 18). Могу доказать, что короче нельзя...

Строители восторженно пожимали руку Ронису, горячо благодарили его.

— Оставайся с нами, — сказал старший из них, — мы научим тебя обращаться с этими инструментами, рисовать карты и планы, строить дома и дороги...

— Спасибо, — сказал Ронис. — Мне очень нравится ваша работа, и я охотно поучился бы у вас. Но я пока еще мало знаю о применениях математики и хочу поглядеть на мир. Возможно, я еще вернусь к вам...

Он переночевал у строителей. Утром они приступили к прокладке будущих дорог, а Ронис двинулся дальше.

[1] Здесь требуется знание теоремы Пифагора и некоторых свойств правильных многоугольников (материал VII—VIII классов).

Через несколько дней он вышел на равнину. По ней издалека тянулась дорога, уже были построены мосты и подъезды к ним. Но затем дорога внезапно обрывалась. Группа людей сидела на лугу около конца насыпи и, видимо, не собиралась работать. Заинтересованный Ронис подошел к людям.

— Здравствуйте, добрые люди, — начал он, — объясните мне, что случилось. По виду вы похожи на строителей, рядом с вами я вижу инструменты... Дорога явно не окончена, но никто не делает попыток продолжать строительство...

— Ты прав, юноша, — сказал один из сидевших, — мы строили дорогу и довели ее сюда. Теперь предстоит пересечь равнину, но не знаем, куда направить дорогу. Впереди, видишь, три поселка, дорога проходит мимо них, придется строить станцию и соединить ее с поселками. Пока не выбрано место для станции, строить дорогу нельзя. А место никак не могут определить.

— А что же мешает выбрать место для станции? — осторожно спросил Ронис.

— Вот эти самые поселки никак не сговорятся. В первом выращивают скот. Откуда будут везти на станцию для отправки на продажу баранов и овец, шерсть и мясо, молоко. Во втором поселке хлопкоробы. Откуда будут везти хлопок, свои знаменитые дыни. В третьем — кирпичный завод. Он будет слать людям строительные материалы. Как видишь, все эти люди занимаются полезным трудом, но каждый из них считает свое дело более важным и требует, чтобы станция находилась как можно ближе к его поселку... И вот они уже не первый день спорят, а мы тоскуем по настоящей работе.

— Неужели нельзя помочь этим людям справедливо договориться?

— Помочь, конечно, можно. Но если человек затыкает уши, то он не услышит доброго совета. А эти люди уже отчаялись и не верят в возможность правильного решения вопроса. Вот сейчас наш начальник идет к ним попытаться еще раз договориться о месте для станции...

— Возьмите меня с собой, — попросил Ронис, — кажется, эта задача интересна и для меня: в ней есть математика...

Тот кивнул, и они отправились к поселкам. По дороге Ронис узнал, что от поселка с кирпичным заводом до поселка хлопкоробов 55 сенов, а до поселка скотоводов 57 сенов. Между поселками хлопкоробов и скотоводов 97 сенов. По весу груз хлопкоробов будет вдвое, а груз скотоводов втрое меньше груза строительных материалов.

Когда они подошли к дому, где собрались представители поселков, солнце стало опускаться. За столом сидели шестеро мужчин с мрачными лицами.

— Здравствуйте, — сказал начальник строителей, — я вижу вы так и не столковались. Давайте же еще раз сообща подумаем и закончим дело со станцией. Иначе мы потеряем время и не закончим работы в этом году...

— Тебя мы знаем, — сказал один из стариков, — но кто этот юноша? Неужели мы должны поверить, что этот юнец решит то, что не смогли решить все мы?

— А вот посмотрим, — сказал строитель. — Этот юноша много

лет учился у знаменитого мудреца... — Он произнес имя учителя Рониса, и старики дружно закивали, они слыхали об этом ученом.

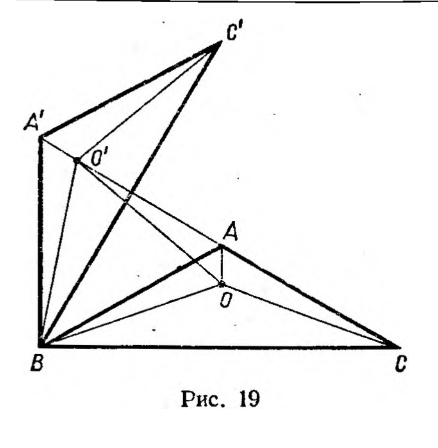


Рис. 19

— Хорошо, — сказал один из стариков, — я напомню наш спор. Сперва мы хотели расположить станцию так, чтобы всем было одинаково близко, и мы построили окружность, проходящую через три точки, обозначающие на карте наши поселки. Но оказалось, что ее центр не годится. Есть много точек, которые ближе к каждому из поселков, чем центр этой окружности.

Затем, — продолжал старик, — мы стали искать место, от которого общая длина дорог до поселков была бы наименьшей. Но мы не нашли его. Вот они, — он показал на представителей заводского поселка, — утверждают, что станцию нужно строить просто в их поселке, но мы с ними не согласны.

— Извините, уважаемый, — заговорил Ронис, — но в данном случае они были правы. Если соединить на карте отрезками ваши поселки, получится треугольник, у которого длины сторон 55, 57 и 97. Легко проверить, что $55^2 + 55 \cdot 57 + 57^2 = 97^2$. Это значит, что величина угла между двумя меньшими сторонами 120°. Нарисуем такой треугольник. Пусть внутри треугольника ABC отмечена точка O (рис. 19). Сумма ее расстояний от вершин — сумма длин отрезков OA, OB, OC. Если выполнить поворот треугольника ABC вокруг точки B на 60°, то точки A и O отобразятся на точки A' и O' соответственно. Легко видеть, что $|A'O'| = |AO|$ и треугольник BOO' правильный. Следовательно, $|OB| = |BO'|$ и сумма расстояний от O до вершин A, B, C равна длине ломаной $A'O'OC$. Она окажется наименьшей, если точки A', O', O, C принадлежат одной прямой. Но треугольник ABA' правильный, поэтому точки A', A, C принадлежат одной прямой. На этой прямой и нужно искать точку O. Так как величина угла BOC должна быть 120°, то точка O должна совпасть с точкой A.

Выходит, что представители заводского поселка не ошиблись: если построить станцию в их поселке, длина подъездных дорог к станции окажется наименьшей возможной.

— Ну, что ж, юноша, — сказал старик, — ты хорошо объяснил, как добиться того, чтобы подъездные дороги обошлись дешевле. Но ты со свойственным юности нетерпением перебил меня, не дослушав до конца. Ведь мы же строим дороги не для прогулок, нам нужно перевозить хлопок и мясо, шерсть и кирпичи. И если станция будет излишне далеко от поселков, то это принесет нам больше убытков, чем строительство более длинной дороги...

— Вы правы, — сказал Ронис, — нужно искать место для станции так, чтобы расстояния от нее до поселков были обратно пропор-

3 Заказ 368

циональны величинам грузов, которые будут идти от этих поселков к станции... Как же ее найти?

Если O — такая точка, то $|OB| = 2\,|OA|$ и $|OC| = 3\,|OA|$.

У треугольника есть свойство: биссектриса внутреннего угла делит сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Это можно доказать с использованием площадей или подобия треугольников... Такое же свойство имеет и биссектриса внешнего угла. Значит, если построить биссектрису угла ACB и смежного с ним, то они пересекут прямую AB в точках K и T так, что $|BK| = 2|KA|$ и $|BT| = 2\,|AT|$. Так как угол KCT прямой, то точка C принадлежит окружности диаметра KT. Аналогично можно построить окружность с диаметром на прямой AC. Они пересекутся в точке O...

Ронис быстро проделал построение и показал собравшимся (рис. 20).

— Ну, что ж, наверное, так можно...

— Можно согласиться...

— Кажется, справедливое решение...

Начальник строителей быстро перенес построение на свою карту.

— Ну, вот и кончилось... Так и начнем тянуть линию. Спасибо, Ронис.

Он почти выбежал из комнаты.

Один из стариков подошел к Ронису.

— Хорошо, юноша. Видно, что у вас был достойный учитель... Но вы так толково разобрались с дорогами, что я хочу задать вам еще один вопрос. Мне пишет племянник, что там, где он живет, тоже возникло одно затруднение с дорожным строительством. По его словам, у них четыре населенных пункта расположены в вершинах квадрата с длиной стороны 100 сенов. Решили они построить дороги так, чтобы из каждого пункта можно было проехать в остальные. Дело хорошее, но денег у них хватает только на строительство дороги длиной в 275 сенов. И сколько они не бьются, не могут придумать, как проложить дороги. Все получается длиннее...

— Что вы говорите, — оживился Ронис, — да ведь это действительно интересно... Если построить дороги по всем сторонам, их длина составит 400 сенов. Если их построить по двум параллельным сторонам и соединить середины, получится 300 сенов... Если построить дороги по диагоналям, их длина будет примерно 283 сена... Чтобы поискать пути покороче, представим себе, что вместо квадрата имеем прямоугольник $ABCD$, причем $|AB| = 100$ сенов, а треугольники AOB и COD правильные. Тогда дороги из A и B должны были идти под углами по 30° к $[AB]$. Так же шли бы дороги из пунктов C и D. Затем нужно было бы соединить центры O и O_1 треугольников ABO и CDO... Будем перемещать $\triangle CDO$ так, чтобы центр O_2 двигался по отрезку O_1O_2, а одна сторона оставалась перпендикулярной к O_1O_2. Когда вместо прямоугольника $ABCD$ получится квадрат, уменьшится расстояние между центрами треугольников, размещение останется выгоднейшим (рис. 21).

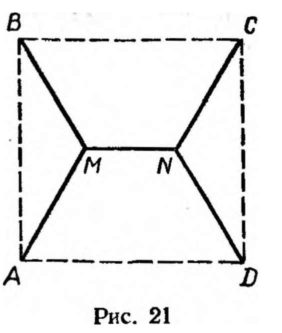


Рис. 21

Общая протяженность дорог составит $4 \cdot \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 100 - 2 \cdot \frac{50}{\sqrt{3}} = 100 + 100\sqrt{3}$, т. е. примерно 273,2 сена... Это их устроит. Денег, как видите, хватает...

Старик чуть не плясал от радости. Он не отпустил Рониса, оставил ночевать у себя. Но наутро Ронис оставил гостеприимный дом, как его ни уговаривали, и отправился дальше.

Прошло несколько дней, и дорога привела Рониса к приморскому городку. Беленькие здания с красными крышами, зеленые деревья около каждого домика, ровные чистые улицы очень понравились Ронису. Вдруг до него донеслись какие-то странные звуки: кто-то то ли бормотал, то ли всхлипывал... Присмотревшись, Ронис заметил юношу, сидевшего под деревом у столика, заваленного бумагами. Бумаги лежали и на траве. Юноша то писал, то в отчаянии комкал бумагу и отбрасывал ее от себя. Он что-то говорил, но разобрать его слова было трудно.

Заинтересованный происходящим, Ронис подошел к юноше, поздоровался и спросил, что с ним. Тот скомкал очередной лист бумаги и не ответил. Казалось, он не видит ничего окружающего. Ронис повторил свой вопрос.

На этот раз юноша заметил путника, кивнул ему, но продолжал сидеть молча. Листы на столе были исписаны какими-то формулами, и Ронису хотелось узнать, чем же все-таки занят юноша. Вид его был необычным. Видимо, он сидел здесь долго. Ветер растрепал его волосы, глаза были красноваты.

В конце концов он заговорил:

— Проходи, путник, не мешай мне дожить свой последний день на земле...

— Что вы говорите? — изумился Ронис. — О каком последнем дне может идти речь?! Вы еще так молоды, вся ваша жизнь впереди...

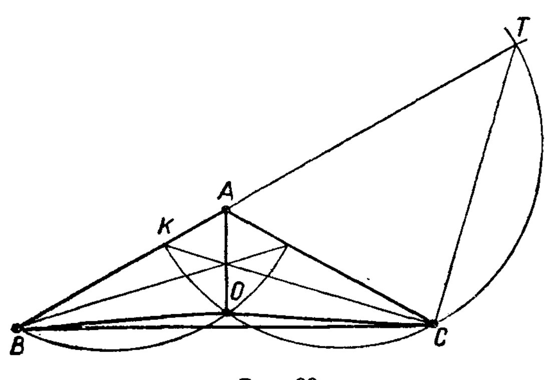


Рис. 20



Расскажите, что случилось, может быть, и удастся преодолеть возникшие затруднения...

— Проходи, путник. Помочь мне невозможно. Ничто уж меня не спасет...

Все же настойчивые уговоры Рониса привели к тому, что юноша отодвинул лист бумаги и стал рассказывать о себе.

— Я не живу в этом городе. Мой родной дом далеко отсюда. С детства меня считали очень способным к наукам. Отец надеялся, что я смогу выучиться, стать знаменитым ученым. И я тоже в это верил. В местной школе я учился без особых усилий. Благодаря своей памяти я хорошо усвоил многие правила действий, запомнил поучения знаменитейших ученых. Отец решил, что больше мне в своем городе учиться нечему. В школе его уверяли, что это не так, но отец был непреклонен и послал меня сюда, чтобы я показал свои познания в этом городе. Здесь должны были удостоверить силу моего ума, и тогда я смог бы заняться самостоятельными исследованиями...

— Какая же наука заинтересовала вас больше других?

— Разумеется, математика. Так вот, здесь меня выслушали, но не пришли в восторг от моего рассказа о полученном образовании. Они предложили мне решить три задачи. Когда я принесу решения, со мной будут говорить подробнее и определят мою судьбу. Я сразу понял, что они придираются ко мне, не хотят признавать меня равным

им. Это не столько огорчило меня, сколько возмутило. Но я сдержал себя и спросил, сколько времени они дают на решение задач. Услышав, что они предлагают недельный срок, я рассмеялся и пообещал принести решения через два дня. Однако я не учел их коварства: задачи оказались ужасными. Я смог решить только одну из них, хотя истратил бумаги не меньше, чем за год учения дома. И вот сегодня кончается срок, который я сам себе назначил. Если я не решу задач, мне нечего обращаться к ученым. Вернуться к отцу ни с чем я тоже не могу. По-видимому, с закатом солнца окончится и моя жизнь...

— Позвольте и мне взглянуть на эти задачи, — попросил Ронис,— я изучал математику. Может быть, я увижу какую-нибудь возможность решить их...

Юноша с сомнением посмотрел на Рониса.

— Едва ли ты сможешь их решить. Если даже я, которого с детства прочили в будущие светочи науки, запомнивший сотни законов, теорем и правил, не справился, то что сможешь ты... Ну, ладно.

И гордец показал Ронису один из листов.

Требовалось доказать справедливость равенства:

$$\frac{a^3(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^3(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$+\frac{d^3(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=x^3.$$

— Такие примеры обычно предлагают, чтобы проверить, хорошо ли испытуемый усвоил алгебраические правила. Но я-то знаю их великолепно. Предстояло выполнить огромный объем работы, но я довел доказательство до конца.

Я решил сложить дроби, стоящие в левой части. Чтобы удобнее привести их к общему знаменателю, я заменил во втором знаменателе множитель $b - a$ на $a - b$, одновременно изменив знак перед дробью. В третьем знаменателе я вместо $c - a$ и $c - b$ написал $a - c$ и $b - c$. В последней дроби я заменил все множители знаменателя и знак перед дробью на противоположные.

Теперь стало возможным привести дроби к общему знаменателю:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

что я и сделал. Затем я раскрыл скобки, выполнил группировку, сократил дробь и получил то, что стояло в правой части. Вот записи...

— Такое решение, конечно, показывает умение выполнять преобразования. Однако я не думаю, чтобы экзаменаторы предлагали пример с таким громоздким решением. Вероятно, существует более простой путь доказательства.

Юноша иронически улыбнулся.

— Уж не думаешь ли ты, путник, что мое решение неверно?

Ронис заверил его, что не сомневается в правильности решения, просто ему кажется, что возможно иное рассуждение...

— Такое равенство можно рассматривать либо как тождество, либо как уравнение. Если это уравнение, то какой оно степени относительно x?

— Разумеется, третьей. Выше третьей степени здесь нет.

— Это несколько неточно, — заметил Ронис, — возможно, после приведения подобных членов x^3 исчезнет. Так что лучше говорить: не выше третьей степени... Сколько же корней имеет такое уравнение?

— Если оно третьей степени, то 3, если второй — два, если первой — один.

— Хорошо. Попытаемся найти его корни. Не является ли корнем $x = a$?

— Если $x = a$, то $x - a = 0$, т. е. три последние дроби равны нулю. Первая же равна a^3, остальное сокращается. Но такую же величину имеет и правая часть при $x = a$. Ты прав, путник, $x = a$ действительно является корнем уравнения.

— Но так же можно показать, что корнями являются $x = b$, $x = c$ и $x = d$.

Юноша кивнул. Его явно не интересовали рассуждения Рониса.

— Таким образом, оказывается, что уравнение не выше третьей степени имеет четыре корня. Но такого не может быть. Следовательно, данное равенство не уравнение, а тождество. А именно это и требовалось доказать.

— Что? — воскликнул юноша, до которого вдруг дошел смысл рассуждений Рониса. — И это все?

— Конечно, все. Я думаю, что такое рассуждение и имели в виду те, у кого вы получили задание... А каково было второе задание?

— Требовалось решить уравнение: $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}$. Я постепенно избавился от корней и привел к привычному виду это уравнение. Потребовались сложные выкладки, но в результате получилось вот что: $x^{16} - 50x^{14} - 4\,375x^{12} + 278\,800x^{10} + 1\,670\,600x^8 - 364\,700\,000x^6 + 7\,641\,610\,000x^4 - 54\,468\,000\,000x^2 + 129\,600\,000\,000 = 0$. Вот это уравнение я решаю с самого утра, и ничего не получается. Я заменил x^2 на y, но дальше не продвинулся...

— Такое уравнение, действительно, не просто решить, — сказал Ронис, — однако я не уверен, что условие имеет в виду именно такой подход... Давайте-ка взглянем еще раз на начальное уравнение.

Все слагаемые левой части неотрицательны, причем одновременно нулями они быть не могут. Таким образом, левая часть положительна. Значит, положительна и правая, т. е. корень уравнения положительный. Так?

— Разумеется.

— Пусть при некотором $x = a$ выражения в обеих частях уравнения окажутся равными. Если x станет увеличиваться, левая часть будет расти, а правая — уменьшаться. Равенство нарушится. Если x будет уменьшаться, то левая часть будет уменьшаться, а правая — расти. И в этом случае равенство нарушится. Таким образом, уравнение имеет только один корень.

Если $x = 5$, то левая часть равна $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 24$. Правая часть тоже равна 24. Значит, $x = 5$ — корень этого уравнения. Из того, что мы говорили раньше, следует, что других корней это уравнение не имеет.

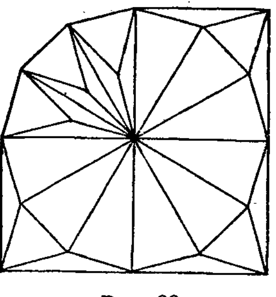


Рис. 22

— Но ведь я получил уравнение 16-й степени... Значит, корней должно быть гораздо больше...

— Во-первых, вы трижды возвышали обе части в квадрат и это привело к появлению посторонних корней. Во-вторых, может быть, левая часть делится на $(x - 5)^2$. Так что никакого противоречия здесь нет. Корень один: $x = 5$.

Юноша некоторое время молчал. Затем он неуверенно спросил, не пожелает ли его собеседник взглянуть на третью задачу. Она относится к геометрии. Получив согласие, он развернул чертеж.

— Требовалось разрезать правильный двенадцатиугольник на такие части, из которых можно сложить квадрат. Я пытался сначала превратить двенадцатиугольник в треугольник, затем треугольник — в прямоугольник, а уже прямоугольник в квадрат. Так и полагается по правилам. Но получается огромное число кусков, а условие требовало разрезать на наименьшее возможное число частей...

Тогда я попробовал разрезать иначе. Сперва я разделил двенадцатиугольник на четыре одинаковые части. Одну из них я разрезал на девять частей — на три правильных треугольника и шесть равнобедренных. Приложив эти треугольники к основным частям, я получил три одинаковых квадрата (рис. 22). Из трех квадратов я получил один. Здесь кусков получилось не так много, как в первый раз, но все же немало...

— Ну, что же, — сказал Ронис, — вероятно, действовать по общим правилам не следовало. Если все задачи решать одним способом, то решения будут получаться длинными, сложными. Всегда полезно присмотреться к особенностям условия. Если их учесть, нередко удается найти более простое решение...

Если соединить центр двенадцатиугольника с вершинами, взятыми через одну, то получается шесть одинаковых четырехугольников. У каждого из них диагонали взаимно перпендикулярны, длина каждой из них равна радиусу описанной окружности. Поэтому площадь четырехугольника равна $\frac{R^2}{2}$, а площадь всей фигуры — $3R^2$. Следовательно, сторона искомого квадрата равна $R\sqrt{3}$, т. е. такая, как у стороны правильного треугольника, вписанного в ту же окружность, что и двенадцатиугольник. Поэтому отрежем часть, соединив отрезком первую и пятую вершины. При наибольшей стороне отсеченного пятиугольника углы по 45°. Значит, такие пятиугольники можно поместить около каждой стороны квадрата. Чтобы иметь четыре куска, соединим еще вершины — шестую и десятую. Наметим куски, симметричные названным. Останутся еще два куска — правильный треугольник и семиугольник (рис. 23). Если их поместить в центре квадрата, все получится. Вот так (рис. 24). Следовательно, две-

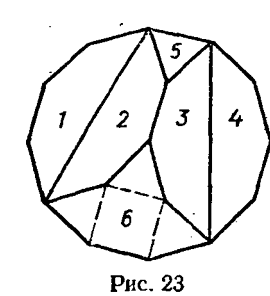


Рис. 23

Рис. 24

надцатиугольник пришлось разрезать на шесть частей. А меньше их быть не может.

Юноша был совершенно подавлен той легкостью, с которой Ронис решил задачу. Он собрал в сумку листы со своими решениями, взял записи Рониса и, забыв поблагодарить, удалился. Однако, сделав десятка два шагов, он остановился и попросил Рониса подождать его.

Ронис не очень обрадовался этой просьбе, ему хотелось идти дальше, но все-таки было интересно узнать, чем окончится этот экзамен...

Юноша вернулся очень скоро.

— Ну, как прошла ваша беседа? — спросил Ронис.

— Я показал им твои решения. Они одобрили и сказали, что не надеялись на такой результат. Я показался им при первой встрече менее находчивым. Но я не мог выдавать чужую работу за свою и прямо сказал им о тебе. Потом я показал им свои решения. Они полистали мои записи и сказали, что я все-таки рано покинул школу, мне еще нужно поучиться... математически мыслить. Возможно, они и правы. Так что я решил вернуться домой. Надеюсь, что отец поймет меня и даст мне еще усовершенствоваться дома в математике...

А тебя они просили зайти к ним. Кажется, ты их заинтересовал.

Ронис простился с юношей и, расспросив дорогу, отправился в город.

Экзаменаторы оказались вовсе не придирчивыми чудаками, как можно было подумать, слушая рассказ юноши о них. Имена некоторых из них Ронис встречал на книгах, которые изучал в библиотеке учителя. Беседа шла оживленно и доставила удовольствие собеседникам. Ронис остался в этом городе — и поучиться, и работать.

Забегая вперед, скажем, что ему не пришлось никогда жалеть о своем решении. Он, действительно, получил здесь основательные знания и выполнил исследования, которые сделали его имя известным.

Но все это ждало его впереди. А в тот день просто окончилось первое путешествие молодого математика.

СОЛДАТ-МАТЕМАТИК

1. СОЛДАТ ПОПАДАЕТ В ВОЛШЕБНЫЙ ЗАМОК

Случилось это давно, неизвестно в каком году. Отслужив службу королевскую, возвращался солдат домой. Не выслужил он ни наград больших, ни богатства несметного. Был честным солдатом, в сраженьях показал себя храбрым и стойким воином. Хорошо и быстро находил, как приказ выполнить — толково и с потерями наименьшими. Но на язык был остер, несправедливостей не терпел, обидчиков не прощал.

Поэтому не очень его начальство жаловало. Вот и возвращался он в родную деревню таким же бедняком, каким уходил на военную службу.

Шел он, шел, притомился. Видит: в стороне от дороги на горе замок.

— Ну, — думает солдат, — попрошусь-ка я там переночевать. Это, пожалуй, будет лучше, чем на сырой земле под кустом провести ночь.

Подошел он к воротам замка, постучал. Нет ответа. Еще постучал, опять тихо. После третьего стука откуда-то из-за стены голос прозвучал:

— Чего тебе, солдат, надобно?

— Разрешите переночевать. Возвращаюсь я домой со службы в армии королевской. Устал в дороге. Мне много места не надо. За ночлег я уж как-нибудь расплачусь, отслужу.

— Какая уж там с тебя плата... Ну, ладно, входи.

Распахнулась калитка в стене. Шагнул солдат в калитку. Никого перед ним нет. Протянулась от стены к замку дорожка мощеная.

Пошел солдат по дорожке. Поднялся на крыльцо. Двери сами распахнулись. Так и шел он из комнаты в комнату — куда раскрытые двери указывают.

Пришел в небольшую комнату, из нее уже ходу нет.

В комнате стол, стулья, постель у стены. Присел солдат, котомку свою развязал, поесть собирается.

И вдруг — неведомо откуда и как — на другом стуле перед ним старичок оказался. Седой, с большой бородой, глаза живые, щеки румяные. Одет не бедно. Удивился солдат, но виду не показывает.

— Здравствуйте, — говорит. — Стало быть, это вы и есть хозяин замка?

— Да, это мой родовой замок, — говорит старик. — Убери-ка ты пока свою котомку в сторону. У меня в замке есть чем гостей угощать.

И только сказал, сразу на столе оказались тарелки с едой, кувшины с вином и водой, чашки, ложки, вилки.

Понял солдат, что попал в волшебный замок, и уже пожалел, что зашел сюда. Не нажить бы беды. Но пока пододвинул к себе угощение и поел. Неизвестно, что будет дальше. Подкрепиться не мешает.

Поел солдат. Поблагодарил хозяина. Сразу посуда куда-то исчезла.

— Ну, — говорит старик, — ты сказал у ворот, что за гостеприимство расплатишься, отслужить не прочь. Так ведь?

Кинул головой солдат. Сказал, что он — человек честный, с детства привык расплачиваться за все, что для него сделают.

— Ну, так, может, поработаешь в замке немного?

— Отчего же не поработать. А работа какова?

— Надо бы сад посторожить. Великолепный сад, яблоневый. Да живу я в замке один, самому мне за садом не уследить.

Молчит солдат. Думает: от кого же сад сторожить-то? Через такие стены, как у этого замка, человеку не перебраться. Не иначе, другие волшебники тем садом интересуются. Здесь можно в такую кутерьму попасть, что и живым не выберешься...

— Соглашайся, солдат. Работа не тяжелая. А уплачу тебе я щедро. Сколько скажешь, столько и получишь. Лишь бы унести смог...

— А сколько времени сторожить-то?

— Ну, хоть месяц.

— Вот так штука, — думает солдат. — Когда же я домой попаду? Пожалуй, заломлю я такую цену, что ему и держать меня станет невыгодно...

— Я, — говорит, — человек не жадный, мне много не надо. Только я домой спешу, мне каждый день дорог. Давайте условимся так. За первый день уплатите мне 1 пфенниг, за второй 2 пфеннига, за третий 4 пфеннига, за четвертый 8 пфеннигов. Каждый день — вдвое больше, чем за предыдущий.

— Больно мало просишь, — говорит старик. — Не передумаешь?

— Нет, — говорит солдат, — мое слово твердое.

— А чтоб не передумал, сейчас договор составим.

И сразу на столе появились два листа пергамента, чернильница массивная и перо гусиное. Забегало перо само по пергаменту, записало условия, которые солдат поставил.

Подписал солдат оба листа пергамента. Какую-то закорючку поставил хозяин замка, приложил свой перстень к договору. Один листок хозяин замка взял себе, второй солдату отдал.

Пожелал он солдату доброй ночи и исчез.

— Ну, — думает солдат, — во всяких переделках бывал, но жив остался. Авось и теперь обойдется. А если месяц он меня продержит, то платить ему придется много. Так что попаду домой скоро, да притом еще с деньгами.

С такими приятными мыслями он и заснул.

2. КВАДРАТНАЯ ПЛАСТИНКА И ВОЛШЕБНОЕ КОЛЬЦО

Утром хозяин показал солдату свой сад. Яблони одна краше другой росли так, что их ряды, как заметил солдат, образовывали сеть квадратов.

— Хороший сад, — заметил солдат.

— Хороший, — согласился хозяин. — Только собрать урожай с него трудно.

— А разве в замке работников нет? — осторожно спросил солдат.

— Не в работниках дело. Когда начинают поспевать яблоки, в сад лезут мои заклятые враги — гномы с окрестных гор. Лезут буквально средь белого дня. Вот они-то и растаскивают чудесные плоды из этого сада.

— От гномов устеречь будет трудно, — говорит солдат, — их много. Всех не переловишь. За одним погонишься, другие кучу яблок унесут...

— Пока яблоки не созрели, гномов в саду нет. А появятся — бегать за ними, конечно, бесполезно. Но бороться с гномами можно. Перво-наперво, нужно бы волшебный квадрат изготовить.

— Магический квадрат, что ли?

— Нет, не магический. В магическом квадрате числа, написанные в каждой клетке, все разные, а суммы по горизонталям, по вертикалям и по главным диагоналям одинаковые. Вот, например...

И старик заостренной палочкой быстро начертил на усыпанной песком площадке:

3	6	15	10
13	8	1	12
4	9	16	5
14	11	2	7

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

А волшебный квадрат — совсем другой. Его нужно склеить из квадратиков, среди которых нет одинаковых. Был бы у меня такой квадрат, все пошло бы на лад. Повесил бы его в саду, и ни один гном днем не появился бы...

Да только не могу я такой квадрат склеить. Пробовал, конечно, но без одинаковых квадратов не обойтись. Прямоугольник однажды получился: одна сторона 32, вторая 33. Вот такой (рис. 25).

Да только прямоугольник не действует на гномов.

Вот на столике лежат разные квадратики. Сложи-ка ты из них один квадрат, это и будет твоя первая служба по охране сада. Какие из квадратиков брать, сам додумайся...

Подошел солдат к столику. И верно: лежат на нем квадратные пластинки из какого-то металла. На каждой размер стороны написан.

— Как только сложишь правильно квадрат, кусочки сами склеятся...

Присел солдат к столику. Дело вроде бы простое, а не получается. Прямоугольники два раза получались, а квадрата все нет... Даже обидно делается солдату, вроде и старается, а результатов никаких.

Так с утра до вечера сидит солдат за столиком. По звонку уходит в свою комнату обедать. Там же завтракает утром и ужинает вечером.

Только на пятнадцатый день получился квадрат. Солдат даже и не понял, что решил задачу. Но вдруг все 24 квадрата склеились, и швы засветились голубоватым светом (рис. 26).

Появился хозяин, схватил пластинку, глазам своим не верит.

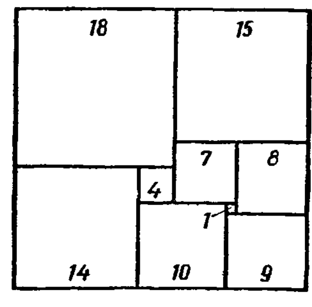


Рис. 25

— Ну, молодец. Как же ты сумел?

А солдат толком объяснить не может. Вроде бы и случайно получилось. Но ведь как-то примерял, пробовал, проверял последовательно...

— Не объясняешь, ну и что ж. Есть теперь у меня волшебный квадрат, и днем сад в безопасности будет. Теперь нужно укрыть сад от разбойников-гномов и в ночное время.

Растут в центре сада особо ценные яблони. Плоды с них не только вкусные, но и от разных болезней лечат. Вот эти деревья мне особенно хочется от гномов уберечь.

Есть у меня в замке волшебное кольцо. На вид неказистое, даже на простое железное похоже. Но если вынести его в сад, поднести к яблоне и сказать, сколько деревьев нужно уберечь, кольцо растянется и закроет ровно столько яблонь, сколько было сказано: одну, две, три, четыре... И не один гном в ночное время войти внутрь круга не посмеет.

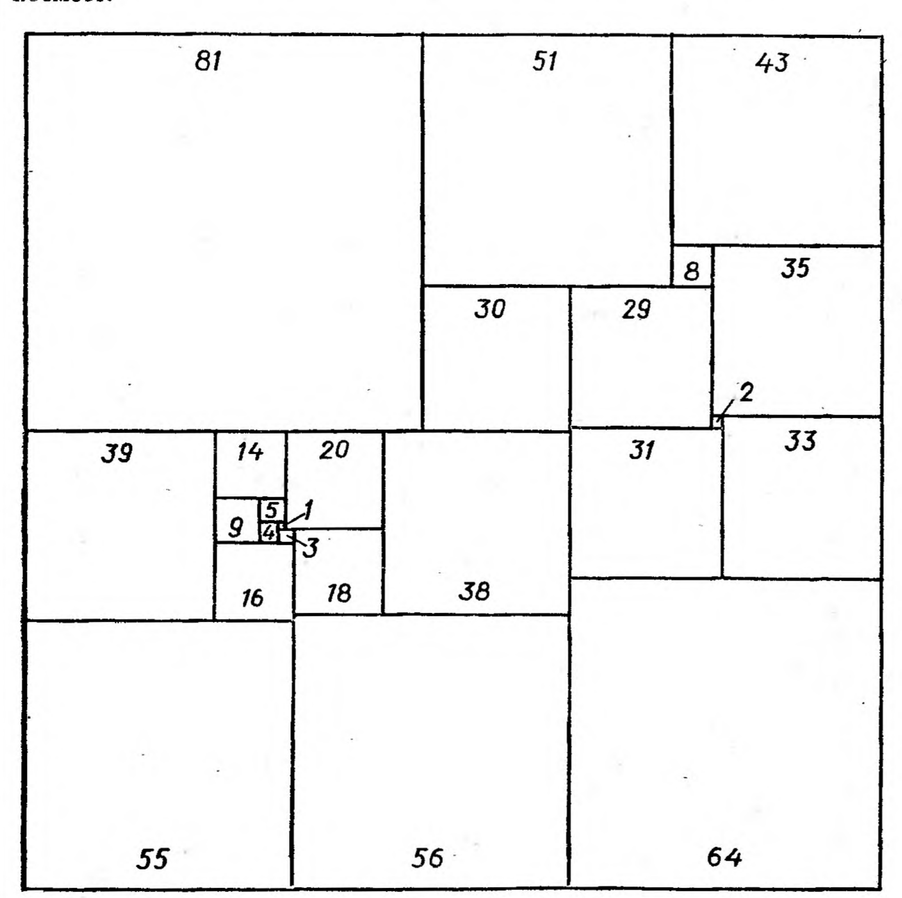


Рис. 26

— Тогда все хорошо,— сказал солдат. — Днем охранит волшебный квадрат, а ночью — волшебное кольцо.

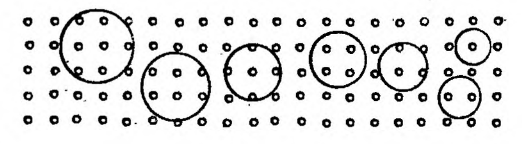


Рис. 27

— Я не знаю, как кольцо действует. Если ему назвать число, которое под силу кольцу, оно накроет столько яблонь, сколько сказано. Но если назвать столько деревьев, сколько оно не может охватить, волшебные свойства кольца вообще пропадут. Я называл одно дерево, два, три, четыре, пять. Кольцо растягивалось. А дальше я побоялся...

— И никак нельзя узнать, как сильно оно может растянуться?

— Оно охватит указанное число яблонь только тогда, когда оно может покрыть и все меньшие количества деревьев.

— Значит, оно закроет 10 деревьев только в том случае, если смогло бы закрыть и одно, и два, и три, ... , и девять деревьев?

— Вот именно. Выясни, какое наибольшее число деревьев сможет покрыть волшебное кольцо. На столе есть чем и на чем писать, есть линейка, циркуль...

И хозяин удалился, бережно держа волшебный квадрат.

А солдат принялся за новое дело. Нарисовал сеть одинаковых квадратов и начал строить окружности. Сперва дело шло легко. Он построил окружности так, что они охватили 1, 2, 3, 4, 5, 6 вершин этих квадратов (рис. 27).

А дальше построения стали получаться все медленнее и медленнее. Не полагаясь на чертеж, приходилось дополнительно вычислять, лежит ли точка внутри круга. К концу недели солдат додумался до размещения внутри кольца 35 яблонь. И тут он с ужасом подумал, что так его работа никогда не окончится. Сколько бы яблонь он не разместил внутри окружности, владелец замка может потребовать выяснить, нельзя ли поместить еще больше...

А что, если волшебное кольцо может охватить любое число деревьев? Но это уже нужно устанавливать не отдельными проверками, а доказательством.

Наверно, здесь пригодится способ рассуждения, который когда-то предложил Паскаль. Кольцо может охватить 1, 2, 3, ... , 35 деревьев. Пусть оно может охватить k деревьев. А не может ли оно охватить и $k+1$ дерево?

Нарисовал солдат снова сетку квадратную. Пусть окружность с центром O и радиуса R охватывает ровно k деревьев. Ближайшее к ней дерево вне круга — M. Если на окружности с центром O радиуса OM других деревьев нет, то, немного расширив ее, охватим уже $k+1$ дерево.

А что, если на окружности радиуса OM есть и другие яблони? В этом случае расширение увеличит число охваченных деревьев не на единицу, а больше. Значит, такой способ не годится...

А что, если провести прямую MO. Она пересечет первую окружность в точках A и B (рис. 28). Окружность диаметра MA охваты-

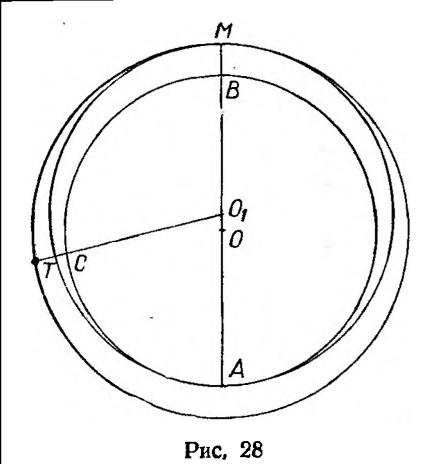


Рис. 28

вает только k деревьев. Точка M лежит на окружности и не является внутренней точкой.

Из яблонь, которые лежат на одной окружности с точкой M (радиуса O_1M), ближайшей к построенной окружности диаметра MA является T. Ее расстояние от названной окружности $|TC| = a$. Значит, окружность диаметра MA после расширения ее на величину, меньшую a, захватит яблоню M, но не захватит ни одной яблони, кроме M. Поэтому внутри окружности станет равно $k+1$ яблонь.

Выходит, что всегда можно перейти от k к $k+1$. Поэтому волшебное кольцо может охватить не только 1, 2, 3, ..., 35, но и 36, 37, ... любое число яблонь...

Обрадованный солдат не заметил, что он уже давно рассуждает вслух, а незаметно появившийся хозяин внимательно слушает его.

— Ну, что же, — заговорил владелец замка,— решил ты и эту задачу. Очень хорошо, солдат. Теперь уж я свой сад наверняка уберегу.

— Стало быть, служба моя окончена,— обрадовался солдат.

— Нет, нет. Уж коли попал ко мне в замок такой удачливый солдат-математик, то не могу я не попробовать еще одно дело сделать. Тем более, что не вышел еще твой срок службы — до месяца еще неделя целая.

3. ПУТЕШЕСТВИЕ ПО БИССЕКТРАЛЬНЫМ ТОЧКАМ

— Давным-давно пробрались в наш замок тролли. Не брали они ни золота, ни камней драгоценных. Этого добра у них у самих хватало. Унесли они только неказистый с виду сигнальный колокол. Колокол тот не простой. Чуть ступит противник на границу или перейдет ее, начинает колокол звенеть.

Унесли тролли этот колокол, поместили его в центре своих владений.

Вот я и думаю, не поможет ли солдат вернуть этот колокол сюда...

— Значит, вы хотите, чтобы я отправился к троллям за колоколом?

— Не так все просто. Страна троллей далеко, но могу туда подвезти: найдется в замке ковер-самолет, мигом домчит. Найдется и шапка-невидимка, чтобы ни один тролль тебя не заметил. Так что пробраться к колоколу и взять его можно. Вся трудность в том, как его оттуда вынести.

— А разве шапка-невидимка перестанет действовать там?

— Пока сигнальный колокол в руках, она действует только в некоторых точках. Они называются биссектральными.

— Не слыхал,— признался солдат. — Про биссектрису слыхал, а про точки биссектральные — не приходилось.

— Пусть точка O находится внутри некоторой плоской фигуры. Представим себе такую окружность с центром O, которая не пересекает данную фигуру, но касается ее. Если она касается в точке M, то эта точка для точки O — ближайшая. Если окружность касается не в одной точке, то у точки O оказывается несколько ближайших точек. В этом случае точку O называют биссектральной точкой данной фигуры.

— Так, так,— заинтересовался солдат. — Значит, если данная фигура выпуклый угол, то ее биссектральные точки — на биссектрисе, у каждой из них по две ближайшие точки. Наверно, поэтому точки и называют биссектральными.

— Наверно. Все биссектральные точки фигуры образуют ее биссектрису.

— Любопытно,— сказал солдат. — Я с удовольствием подумаю над тем, какую форму имеют биссектрисы различных фигур.

— Подумай, подумай,— согласился хозяин. — Пока не узнаешь этого, колокол нам достать не удастся...

Старик исчез, а солдат, возбужденный услышанным, сел за столик.

Вскоре он выяснил, что биссектриса треугольника состоит из трех отрезков, соединяющих его вершины с центром вписанной окружности. Биссектриса выпуклого четырехугольника оказалась состоящей из пяти отрезков (рис. 29). Через несколько дней он уже мог построить и биссектрису многоугольника — выпуклого и невыпуклого...

Но, когда он сказал об этом хозяину замка, тот недовольно поморщился. По его словам, владения троллей имели форму части круга — не то сектора, не то сегмента. Кажется, там полукруг. Вот и нужно научиться находить биссектральные точки именно таких фигур.

Рис. 29

С переходом к криволинейным фигурам задача усложнилась. Испробовав несколько способов, солдат решил использовать для рассмотрения полукруга прямоугольные координаты, введенные Декартом. Если точка $M(x; y)$ — центр окружности, касающейся дуги полукруга и диаметра $|AB|$, то $|OC| = x$, $|MC| = y$, $|OM| = R - y$. Значит, $x^2 + y^2 = (R-y)^2$. Отсюда $y = \frac{x^2}{-2R} + \frac{R}{2}$.

Знакомое уравнение! Его часто пишут так: $y = ax^2 + c$. Значит, все биссектральные точки лежат на дуге параболы (рис. 30).

Солдат так увлекся решением задачи, что забыл даже о предстоящей вылазке к троллям. Но хозяин замка напомнил ему об этом.

И утром пришлось отправиться в дорогу.

Рис. 30

Недобро поглядывая на солдата, старик напомнил, что шапка-невидимка укроет солдата от троллей, но не от него...

Ковер-самолет доставил мгновенно обоих в какой-то поросший лесом горный район. Прежде чем ковер-самолет опустился, солдат заметил большой ровный участок, имевший форму почти правильного полукруга. Будто прочитав его мысли, старик кивнул: вот это и есть место, где живут тролли.

Вблизи равнины ковер-самолет опустился. Шапка-невидимка действовала безотказно. Солдат и сам себя не видел, хотя прекрасно видел все окружающее. Он ступил на землю троллей сперва неуверенно, а потом зашагал все быстрее. Не прошло и четверти часа, как он оказался у невысокого столба, к верху которого был привязан колокол. Солдат осторожно взялся за язычок колокола и быстро отвязал колокол. Не раздалось ни звука. После этого солдат внимательно огляделся. Он находился на дуге параболы, поэтому для обитателей района оставался невидимым. Он пошел осторожно, все время прикидывая, как размещается здесь биссектриса. Казалось, страха солдат не испытывал, но, когда подошел, наконец, к ковру-самолету, то с удивлением заметил, что весь покрылся потом...

Хозяин замка бережно взял колокол из рук солдата, снова ставшего видимым. Через несколько минут они снова были в замке.

— Ну, что ж, солдат, срок твоей службы кончился. Поработал ты усердно, задания выполнил. Пора с тобой расплатиться и домой тебя отпускать. Сколько тебе причитается?

— Да многовато. По договору, платить нужно пфеннигов сперва 1, потом 2, потом 2^2, потом 2^3, ... , а сегодня уже 2^{29}, так как это 30-й день. А ведь $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{29} = (2 - 1) + (2^2 - 2) + + (2^3 - 2^2) + (2^4 - 2^3) + ... + (2^{30} - 2^{29}) = 2^{30} - 1$. Так что причитается 1 миллиард 73 миллиона 471 тысяча 823 пфеннига...

— Ха-ха-ха! — рассмеялся старик. — Считать ты, солдат, умеешь. Молодец. Только столько ты с меня не получишь. Ну-ка, достань договор и прочитай там, сколько я должен уплатить...

Солдат развернул договор и с удивлением увидел, что там после слов «и так далее — за каждый день службы вдвое больше, чем за предыдущий» написано: «или ту часть этой суммы, которую солдат сможет унести».

Все еще смеясь, старик взмахнул рукой, и на площадке перед солдатом появились аккуратные тюки.

— Вот бери. В каждом по 10 тысяч новеньких пфеннигов.

Солдат приподнял тюк и понял, что зря пожадничал. Он совсем не учел, что монеты имеют вес, и немалый. Больше двух тюков ему не унести...

— Ну, что ж,— сказал он,— два тюка я возьму. Спасибо и за это.

— Ну, ладно,— сказал старик примирительно, — не огорчайся. Бери свои пфенниги. Вот тебе в придачу небольшой подарок.

Коли будет нужда большая, открой табакерку или попроси ее о чем-либо. Она тебя выручит. Только слишком часто к ней не обращайся...

С этими словами старик исчез. Исчез и замок. Солдат с удивлением увидел себя на дороге с котомкой за плечами, с двумя тюками пфеннигов в руках и с табакеркой в кармане.

Он улыбнулся счастливо, что все испытания остались позади, и зашагал по дороге. Домой.

4. ВСТРЕЧА С ГНОМАМИ

День был теплый, солнечный. Солдат бодро шагал, что-то напевая вполголоса. Но скоро он устал. Котомка была не пустая, да и тюки с пфеннигами с каждым часом будто тяжелели. «Хорошо, что я не пожадничал, взял только два тюка»,— подумал солдат.

Потом он начал думать, не зарыть ли ему один тюк, чтобы легче было двигаться. Но эту соблазнительную мысль солдат сразу же отверг. Во-первых, кто-нибудь другой сможет найти и похитить его достояние. А ведь деньги ему и самому понадобятся. Во-вторых, едва ли он сюда вернется...

Усевшись под деревом, солдат решил поесть. Так и сил прибавится, и котомка станет легче.

В котомке вместо сухарей и старого сыра солдат обнаружил свежий хлеб и мясо. Видно, хозяин замка позаботился о питании солдата в пути.

Поев, солдат еще раз проверил содержимое котомки и вдруг заметил там флягу, наполненную приятно пахнущей жидкостью. Еще раз помянув добрым словом старика, солдат хлебнул вина. Теперь ему уже не захотелось спешить. Он растянулся под деревом и задремал.

Пробуждение было неожиданным. Открыв глаза, он увидел, что лежит на том же месте, но встать не может, так как руки и ноги его связаны тонкими веревками. Вокруг него сидели гномы.

— Это ты — солдат из замка? — спросил один из них.

— Почему — из замка? Я был солдатом королевского войска. А теперь иду домой.

— Значит, ты отрицаешь, что жил в замке?

— Почему отрицаю? Я был там месяц, но это случайно.

— Случайно? Ты навредил нам за этот месяц больше, чем все наши враги, вместе взятые.

— Я только помог хозяину замка составить волшебный квадрат.

— Вот именно. И теперь нам нельзя будет побывать в том саду.

— Так ведь там яблони не ваши...

— Ну, это длинная история. Сад-то раньше был нашим. Потом те, в чьи руки попал замок, потребовали с нас за яблоки плату высокую, а далее и вовсе перестали давать нам яблоки... Ну, да это тебя не касается. Так как же ты изготовил этот волшебный квадрат?

— Думал и придумал. Одним словом, с помощью математики.

— А что такое математика? Приемы счета?

— Нет, математика — это наука. В ней учат не только вычислениям, но и многому другому. В одном учебнике говорится, что это «художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополез-



нейшее и многопохвальное». Изучая математику, решают различные задачи.

— Он обманывает нас, — сказал один из гномов. — Он просто злой волшебник. Никто не мог сложить волшебный квадрат, а он сложил.

— Вот в этом мне как раз и помогла математика.

— При чем тут математика?.. Вот мы уже много лет пытаемся сложить прямоугольник из 35 фигурок, а ничего не получается.

— А зачем вам такая забава? Вы ж математику не любите.

— Какая там забава... Этот прямоугольник волшебный. Он открыл бы нам дорогу в одно подземное царство.

— А ну-ка покажите...

Солдат хотел повернуться, но не смог и чертыхнулся.

— Зачем вы меня связали? Развяжите...

— А ты не убежишь?

— Ну, не убегу.

— А за табакерку не будешь хвататься?

— Какую табакерку?

И тут солдат ясно вспомнил последние слова хозяина замка. Значит, табакерка волшебную силу имеет, и гномы не посмели ее тронуть... И он зашептал: «Табакерочка, сними с меня путы...»

И сразу солдат почувствовал, что веревки, связывавшие его руки и ноги, куда-то исчезли. Он повернулся и сел. Гномы в испуге шарахнулись.

— Ну, куда же вы. Не трону я вас. Показывайте ваши фигурки...

Гномы осторожно приблизились. Один из них положил перед солдатом белую пластинку и высыпал на нее из шкатулки многоугольные фигурки.

— Здесь,— стал он пояснять,— 35 фигурок, все разные. Каждая из них состоит из шести квадратов со стороной 1. На каждой фигурке проведены линии, отделяющие квадрат от квадрата.

Всего квадратов $6 \cdot 35 = 210$. Выходит, что можно построить из всех фигур прямоугольник $14 \cdot 15$, или $10 \cdot 21$, или $7 \cdot 30$, или $6 \cdot 35$, или $5 \cdot 42$, или $3 \cdot 70$. А вот не получается ни один из них...

Солдат попробовал приложить фигурки одну к другой. Гномы терпеливо наблюдали за его неудачными попытками.

— А вы уверены, что задача разрешима? — вдруг спросил он.

— А почему бы и нет? Все задачи можно решить...

— Нет, не все. Разве из любых трех отрезков можно построить треугольник? Разве существует трехзначное число, которое равно сумме квадратов своих цифр? То-то...

— А как же узнать, решается ли она?

— А вот попробуем... Давайте закрасим квадратики через один черным цветом (рис. 31). В 24 фигурах будет по 3 черных квадрата, а в 11 — по 2 или по 4. Всего получается от 94 до 116, но всегда черных квадратов четное число. А в прямоугольнике, который вы складываете, черных клеток половина, т. е. $210 : 2 = 105$ — нечетное число. Выходит, что сложить прямоугольник из этих фигурок невозможно. Вот так-то, гномы.

— Хитрая штука математика, — сказал один из гномов. — Я до сих пор думал, что она занимается только вычислениями...

— Да и вычисления не легки, — вмешался другой. — В прошлом году мы измеряли площади наших владений. Многие участки имеют форму квадрата. Так эти вычисления нас совсем замучили.

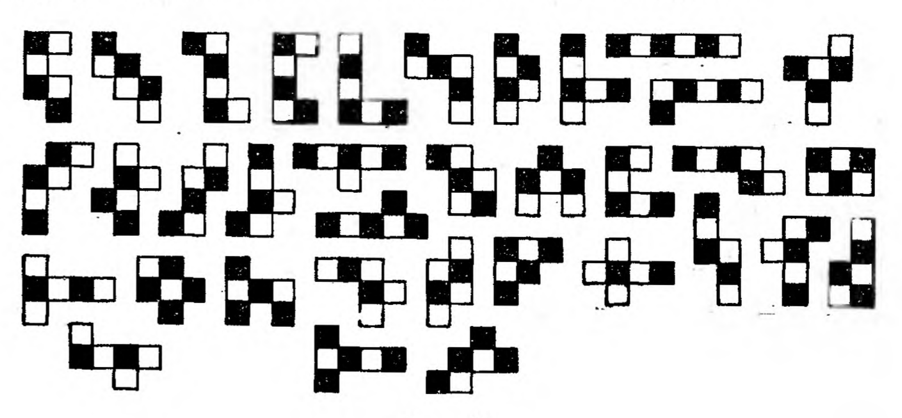


Рис. 31

— Это как раз довольно простая задача, — сказал солдат, — математика знает миого удобных приемов для письменного и устного нахождения квадратов чисел. Как бы вам это показать?.. Ага, — он похлопал себя по карману, — табакерочка, помоги: нужны доска и мел...

И сразу появилась большая черная доска, прислоненная к дереву, а в правой руке солдата оказался кусок мела.

— Для любых чисел x и y верно равенство: $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. Из него следует, что $x^2=(x-y)(x+y)+y^2$. При вычислении x^2 подбирают такое y, чтобы $x-y$ или $x+y$ оказалось «круглым» числом, удобным для умножения.

Пусть, например, ищем 973^2. Если взять $y=27$, то $x+y=1000$, а $x-y=946$. Значит, $(x-y)(x+y)=946000$. Так как $27^2 = 729$, то после 946 припишем 729. Так и нашли, что $973^2=946729$. Если ищем 482^2, то берем $y=18$. Тогда $x+y=500=\frac{1000}{2}$. Поэтому $x-y=482-18=464$, т. е. в произведении $(x-y)(x+y)$ тысяч $464:2=232$. Последние три цифры числа $18^2=324$. Значит, $482^2=232324$.

Есть хорошее правило для возведения в квадрат числа, которое оканчивается цифрой 5: $(10x+5)^2=100x(x+1)+25$.

Если ищем 195^2, то, отделяя последнюю цифру, остается 19. Следующее по порядку число 20. Произведение $19 \cdot 20=380$. Остается дописать справа 25. Таким образом, $195^2=38025$. Часто все это можно выполнить и устно.

Обо всем этом за несколько минут не расскажешь. Учите математику, гномы, сможете проще вычислять и решать задачн. А пока прощайте.

Солдат встал, надел свою котомку, взял тюки с пфеннигами и прошептал несколько слов, обращаясь к табакерке. На мгновение он закрыл глаза. А когда открыл их, то не увидел никаких гномов. Он находился на знакомой улице, перед калиткой родного дома. Теперь-то уж он добрался домой.

НЕ СОВСЕМ ОБЫЧНЫЕ ЗАДАЧИ



Математика интересна тогда, когда дает пищу нашей изобретательности и способности к рассуждениям.

Д. Пойа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

Математическими ребусами называют задания на восстановление записей вычислений. Условие математического ребуса содержит либо целиком зашифрованную запись (цифры заменены буквами или фигурами), либо только часть записи (стертые цифры заменены точками или звездочками).

Восстановление записей выполняется на основании логических рассуждений. При этом нельзя ограничиваться отысканием одного решения. Испытание нужно доводить до конца, чтобы быть уверенным в отсутствии других решений (математический ребус может иметь и более одного решения).

Напомним некоторые приемы решения математических ребусов.

Пусть, например, требуется восстановить запись сложения. Здесь каждая буква имеет всегда одно и то же значение, сколько бы раз ни встречалась. Различные буквы обозначают разные цифры.

```
 ДОСКА
 ДОСКА
 ДОСКА
 -----
 ЛОДКА
```

Рассмотрим справа два крайних столбца (КА + КА + КА = КА с переходом и без перехода) только в том случае, когда КА означает число 50.

Из крайнего левого столбца видно, что Д не превышает 3.

Во втором столбце О не 5 и не нуль, так как эти цифры использованы для двух последних столбцов. Но с учетом перехода О может означать 4 или 9 ($3 \cdot 4 + 2 = 14$, $3 \cdot 9 + 2 = 29$).

В каждом из этих случаев средний столбец должен дать переход 2. Поэтому С больше 6. Проверка показывает, что С = 7, Д = 2, Л = 8, О = 9.

Итак, здесь было записано сложение: 29 750 + 29 750 + 29 750 = = 89 250.

Рассмотрим пример на восстановление записи умножения:

```
   ОДА
   РИС
  -----
   ПАТ
  ИНД
 СОР
 -----
 СПОРТ
```

Первая цифра второго произведения обозначена И, поэтому О = 1. Следовательно, И не меньше 2, и тогда Д означает цифру не более 4.

В третьем произведении Р · А кончается цифрой Р. Это может быть, если А = 6 и Р — четная цифра или Р = 5 и А — нечетная цифра. Из первого допущения следует, что множимое 126 или 146, но это не соответствует третьему произведению. По второму допущению, третье произведение кончается цифрами 15. Значит, А = 3. Поэтому множимое 123 и 143. Проверка показывает, что множимое 123, а множитель 546.

Решим еще один ребус.

```
      . . .
      . 7 .
     ------
      . . .
    . . .
  . . . 7
  ---------
  . . 9 . . 8
```

По числу цифр в произведении видно, что цифра сотен множителя больше 7, и поскольку третье произведение кончается нечетной цифрой, то первая цифра множителя 9. Значит, цифра единиц множимого 3. Так как последняя цифра произведення 8, то цифра единнц множимого 6.

Второе произведение — трехзначное число, поэтому цифра сотен множимого равна 1, а цифра десятков меньше 4. Так как вторая цифра не нуль, то остается испытать умножение 113, 123 и 133 на 976. Только в третьем варианте цифра тысяч произведения оказывается девяткой; следовательно, искомые числа: 976 и 133.

Аналогично решают ребусы на деление. Если при этом цифры заменены буквами, то после окончания расшифровки их записывают в порядке возрастания значений (от 0 до 9) и получают задуманное слово — ключ ребуса.

Пусть дана запись извлечения квадратного корня: $\sqrt{ALPHA} = PPP$.

Поскольку извлекается корень из пятизначного числа, то в полученном числе первая цифра не больше 3. Но она не равна 3, так как 333^2 не пятизначное число, а шестизначное. В то же время Р не равняется 1, так как тогда было бы Р = А. Остается проверить значение Р = 2. Оно удовлетворяет условию: $222^2 = 49\,284$.

Бывают и такие ребусы, в которых сочетаются различные действия.

```
 РОТ — КОН = ТРИ
  :     :     —
 ОТ  ·  ОН  = ОДА
 ----------------
 ИК  +  ПО  = ООИ
```

Умножение во второй строке ($\overline{ОТ} \cdot \overline{ОН} = \overline{ОДА}$) показывает, что О означает единицу: при большем О произведение начиналось бы другой цифрой. Из вычитания в третьем столбце видно, что А — нуль. Поэтому цифра сотен уменьшаемого Т = 2.

Итак, произведение во второй строке кончается нулем, первый множитель 12. Значит, второй кончается пятеркой. Поэтому Н = 5. Д = 8. По третьему столбцу, Р = 9.

В первом столбце дано деление: 912 : 12. Значит, И = 7, К = 6. По второму столбцу (или по третьей строке) найдем: П = 4. Следо-

вательно, данная запись означает: 912 — 615 = 297, 12 · 15 = 180, 76 + 41 = 117.

Приведенные далее математические ребусы для удобства читателей разбиты на группы, к каждой из них поставлен заголовок, соответствующий характеру ребуса или форме, избранной для условия. Там, где использованы слова не русского языка, в сносках сделаны переводы.

ВОССТАНОВИТЕ ЗАПИСЬ СЛОЖЕНИЯ

```
1.  УДАР      2.   МОРЕ     3.  КУРСК     4[1]. WIESE     5.  ДЕТАЛЬ
    УДАР         ШТОРМ          ГОРСК           SENSE         ДЕТАЛЬ
   ------      -------        -------         -------       --------
   ДРАКА       АВАРИЯ         ГОРОДА          HAUFEN        ИЗДЕЛИЕ
```

```
6.  ПОРТ      7.  ВАГОН      8.  ТРОПА     9.  ГОДЫ     10. ЦВЕТОК
    ПОРТ          ВАГОН          ТРОПА         ГОДЫ         ЦВЕТОК
    ПОРТ          ВАГОН          ТРОПА         ГОДЫ         ЦВЕТОК
   -----        -------        -------       ------       --------
    ТОРГ        СОСТАВ         ДОРОГА        ИТОГИ        БУКЕТИК
```

```
11[2].  HAUS     12[3].  TEN     13.  АТАКА     14[4].  LIVRE
        HAUS             TEN          УДАР              LIVRE
        HAUS           FORTY          УДАР             PENSEE
      ------          ------       -------           --------
       STADT           SIXTY        НОКАУТ            SCIENCE
```

15[5]. BAUM + BAUM + BAUM + BAUM = ALLEE.

16. ГОД + ГОД + ГОД + ГОД + ГОД = ИТОГ.

17. ДОМ + ДОМ + ДОМ + ДОМ + ДОМ + ДОМ = ДВОР.

18. СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + СЛОВО + + СЛОВО = ФРАЗА.

19[6]. KLASSE + KLASSE + KLASSE + KLASSE + KLASSE + + KLASSE = SCHULE.

В приведенных ниже текстах телеграмм каждое слово означает некоторое число, зашифрованное так же, как в приведенных выше ребусах на сложение. Последнее слово — сумма чисел, обозначенных предыдущими словами.

20. НИНЕ ТАНЕ ГРИНЕ ПРИВЕТ.

21. ПРОЕКТ ПРИНЯТ КРЯНИК. 22. ПРИЕДУ СРЕДУ ДИДУРА.

23. МАРТА КРЕДИТ ОТКРЫТ. 24[7]. SEND MORE MONEY.

25. БУДУ ТУЛЕ УТРОМ БЕЛТОВ.

---

[1] Луг + коса = копна (нем.),
[2] дом + дом + дом = город (нем.),
[3] 10 + 10 + 40 = 60 (англ.),
[4] книга + книга + мысль = наука (фр.),
[5] дерево + дерево + дерево + дерево = аллея (нем.),
[6] класс + класс + ... = школа (нем.).
[7] Шлите еще денег (англ.),

В помещенных ниже визитных карточках последнее слово обозначает число, равное сумме чисел, обозначенных предыдущими словами.

26. БОРИС ФОМИЧ СЕРБИН. 27. КЛИМ ЛУКИЧ МАЧКУН.

28. KARL MICHEL KRAMEK. 29. ЕЛЕНА ЛЬВОВНА ЛЕВРОВА.

30. РОДИОН ИГОРЕВИЧ ГЕВЧИЧКО.

31[1]. КОВАЛЬ ЛЕВКО ВАВОНИК. 32[2]. PAUL RAKUS LEHRER.

33[3]. ERICH GISEN RINGER. 34[4]. ANTONY ARMAN TURNER.

35[5]. МИКОЛА КРАМОВ РИБАЛКА.

ВОССТАНОВИТЕ ЗАПИСЬ УМНОЖЕНИЯ

```
36.  2 .        37.   7 .       38.   3 .
     . .              . .             . .
    -----           -----           -----
     9 .            . 7 .           . 9 .
   . 9            . . 7           . . 9
   -----          -------         -------
   . . .          . . . .         . . . .
```

```
39.    ***     40.   ***     41.    *3*     42.    ***
       **8           *8*            *3*            *1*
      ----          ----           ----           ----
       ***          ****            3**            **1
     ***3           ***           ****            *2*
     ***            *0*          ***3           **0*
   -------        ------        -------        -------
   ******         ****0         3*****         ****5*
```

```
43.     . . .     44.     . . .     45.    . 8 .     46.     . . .
        . 9 .             . 7 .            . 8 .             . 4 .
       ------            ------           ------            ------
        9 . .           . . . .              . . 8           4 . .
    . . . .             . . .            . 8 . .          . . 4 .
    . . 9             . 7 .              . . .            . . 4
   -----------       ---------         ---------        ----------
   . . . 9 . 9       . . . . 7         8 . . . .        . . . . . .
```

```
47.    ****     48.    **7*     49.    **6*
       **7*            7***            *6**
      -----           -----           -----
      *****           ****7            ***6
      **7*           **7*           **6**
    7***            ****            ****
   -------        -------         -------
   ******7        *7*****         6*6****
```

---

[1] кузнец (укр.),
[2] учитель (нем.),
[3] борец (нем.),
[4] токарь (англ.),
[5] рыбак (укр.).

50.
. . . .
. 8 . .
. . 8 . .
. 8 . .
. . . .
. . . 8 .
. . . .

51.
. . . .
. 7 . .
5 . . .
. 5 . .
. . . 5 .
. . . 5
5 . . 2 . . .

52.
. . . .
. 3 . .
. . . 3
. . . .
. . 3 . .
3 . . .
. . . . . . 3 .

53.
****
**4*
***4
*****
**4*
*4**
4*4****

54.
***
**5*
5**
*5**
**5
***
****55

55.
****
2
***2
*****
**2*
*2**
****2***

56. БУК
КУБ
УРА
СБОР
СРСП
ССКАРА

57. КИТ
ТАК
АКА
ОБК
АТР
ШКОЛА

58. ТИК
ТАК
ТИК
ДВА
КВИТ
ККАРДК

59. ГОР
РОГ
РО ТОР

60. РАК
КПД
КОМАР

61. РАК
К,ПД
ДА

В ребусах 62, 63 использованы только четные цифры, в ребусах 64—66 обе записи отличаются порядком множителей. В ребусах 67, 68 перемножены два числа, а затем перемножены числа, записанные теми же цифрами в обратном порядке.

62.
. .
. .
. . .
. . .
6 . . .

63.
. .
. .
. .
. .
. 8 . .

64.
. . .
. .
. . 7
9 . .
. . . .

. .
. . .
4 . .
. . .
. .
. 7 . .

65.
***
***
4**
****
***
*****7

***
***
1***
**8*
******

66.
**7
***
****
***
7****

***
***
*4**
**4*
**4
*4***

67.
. .
. .
. 0
. . .
. 4 7 .

. .
. .
. 1 .
. 0 .
. . . .

68.
. . .
. . 8
. 0 . .
. . .
. 6 .
. . . 6 .

. 5 .
. . .
. . . 6
. . 0 .
5 . . .
. . . .

ВОССТАНОВИТЕ ЗАПИСЬ ДЕЛЕНИЯ

69. . 6 . 8 . | . . 6
. . . | . 8 .
1 . . .
. 0 . .
. . .
. . 4
0

70. . . . . . . | . . .
. . . 5 | . . 8
. . . .
. . .
. . .
. . .
0

71. . . . . | . . .
. . 7 . | . 7 . .
. . . .
. . . .
. . .
8 . .
9

72. . . . . | . . .
. . . . | . . 8 .
. . . .
. . .
. . . .
. . . 5
0

73. ВОДА : ОДА = ДА.

В ребусе 74 делимое в обоих случаях одно и то же. В ребусе 75 второе деление выполнено с числами, которые записаны теми же цифрами в обратном порядке относительно делимого и делителя в первом делении.

74. . . . . | .
. . | . . .
. .
. .
4

. . . . | .
. | . . .
. .
.
. .
. .
3

75. . . . . | . .
. 5 | . . .
. . .
. . 0
. . .
. . 5
7

. . . 4 | . .
. . . | . 4
. . .
. . .
6

76. ОПОЗДАНИЕ | ВОДА
ОЗЕПН | ВВЗНК
АННКА
АНВВВ
ОВННИ
ОЗЕПН
ВПЕАЕ
ОКПВК
ОПДД

77. КАЛИБР | ЛЕС
ЛЕС | ЕУЛБ
СКУИ
СУУК
ПААБ
ПЛИС
ПСПР
ПРЛР
ЕИР

78. СТАНЦИЯ | ОСА
ДЦП | ДАНПА
ЦАН
НПА
ИОЦ
ИОП
ЦИЯ
НЦА
ООТ

СТЕПЕНИ И КОРНИ

79. $\sqrt{\text{ФАРАОН}} = \text{ФОН}$. **80.** $\sqrt{\text{КАТОК}} = \text{ЛУК}$.

81. $\sqrt{\text{КАРТОН}} = \text{ТОН}$. **82.** $\sqrt{\text{ПРИЗМА}} = \text{ЯМА}$. **83.** $\text{А}^{\text{КР}} = \text{КРАН}$.

84. $\text{О}^{\text{КО}} = \text{СИЛА}$. **85.** $\text{О}^{\text{ДА}} = \text{СТАРТ}$.

ВОССТАНОВИТЕ ЗАПИСИ МНОГИХ ДЕЙСТВИЙ

86.
АБ · АБ = ВГБ
: · :
С : В = В
С · ЖВ = АВЗ

87.
АК · АЕ = КАД
+ : :
Д : З = К
АЕ · Д = АЖЕ

88.
АБ · АБ = ВВБ
· · :
К + А = Е
БЛК — ВА = ЖЗ

89.
РО · ПИ = ТАК
+ — :
АК : И = Т
СИ + ПЛ = ПЛИ

90.
ААА — ПОТ = ОПТ
: + —
ТУ · К = ТТТ
ПИ + ПАР = ПИМ

91.
АБ · БВ = ГГБ
+ — :
ВДГ : ВГ = Е
ВИД — К = ВАЛ

92.
СОР : РУ = УР
+ — +
УС · КУ = СРС
ССК — УХ = САК

93.
КОК — АТ = КСС
+ — —
ТРИ : КМ = МО
КИИК : КС = ПП

94.
□■ · ○■ = ●△○
+ — :
▲ · ▼○ = □□▲
□○ — ● = ●

95.
□■ · ◪■ = ◪◩◩◪
— + —
◪◩ · ■□ = ◩⬒⬒■
⬒◧ · ◧◧⬒ = ⬒◩◪⬒

96.
*1 · ** = **0
6* : *7 = *
** + ** = 20
*2 — * = *
*** + ** = 1**

97.
** · *7 = 1**
*** : ** = *
*8 — * = *
* + ** = **
**5 + 5* = *1*

УПРАЖНЕНИЯ С ЦИФРАМИ

1. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите как можно больше квадратов чисел.

2. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите как можно больше простых чисел.

3. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите два числа, из которых одно вдвое больше другого.

4. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите два числа, из которых одно втрое больше другого.

5. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите три числа, из которых второе вдвое больше первого, а третье втрое больше первого.

6. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите пять чисел, которые пропорциональны числам 1, 2, 3, 4, 5.

7. Использовав цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному разу, напишите три двузначных числа с наибольшим возможным произведением.

8. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите три трехзначных числа с наибольшим (наименьшим) произведением.

9. Не переставляя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате: а) 80; б) 100; в) год своего рождения.

10. Не переставляя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате последовательно кубы натуральных чисел от 1 до 10.

11. Не переставляя цифры 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, а только вписывая, где считаете нужным, знаки действий и скобки, получите в результате: а) 50; б) 100; в) 125; г) 1977.

12. Использовав в каждом случае по одному разу цифры 1, 3, 5, 7, 9, с помощью знаков действий и скобок напишите 1, 2, ... , 100.

13. Использовав все четные цифры по одному разу, последовательно напишите с помощью знаков действий и скобок (можно использовать и понятие степени) числа от 1 до 100.

14. Использовав три одинаковые цифры, напишите (отдельно для единиц, для двоек, для троек и т. д.) наибольшее возможное число.

15. Использовав в каждом случае по одному разу цифры 2, 4, 6, 8, напишите с помощью знаков действий и скобок числа от 1 до 24.

16. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите наибольшее возможное число, кратное 13.

17. Использовав все цифры по одному разу, напишите наибольшее (наименьшее) возможное число, кратное 11.

18. С помощью пяти одинаковых цифр, используя знаки действий и скобки, напишите последовательно числа 1, 2, 3, ..., x:

а) для двоек $x = 26$; б) для троек $x = 39$; в) для четверок $x = 22$; г) для пятерок $x = 17$; д) для шестерок $x = 14$; е) для семерок $x = 22$; ж) для восьмерок $x = 20$; з) для девяток $x = 13$.

19. Написаны в строчку первые 10 простых чисел. Как вычеркнуть 10 цифр, чтобы осталось наибольшее возможное число?

20. Решите предыдущую задачу для 20 простых чисел и 20 цифр.

21. В строчку написаны первые 100 натуральных чисел. Вычеркните 100 цифр так, чтобы осталось наибольшее возможное число.

22. Впишите в каждую клетку таблицы по цифре так, чтобы числа по горизонталям и по вертикалям были квадратами.

23. Дано число 975312. Припишите или вставьте где-нибудь одну цифру, чтобы получилось число, которое делится на 468.

24. Напишите 5 квадратов чисел, у каждого из которых все использованные цифры — простые числа.

25. Напишите наименьший квадрат числа, начинающийся цифрами 2468.

26. Сложите из костей домино магический квадрат: а) 4×4; б) 6×6.

27. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите три трехзначных числа, сумма которых — квадрат. Сколько различных сумм может получиться при выполнении этого задания?

28. Использовав все цифры по одному разу, напишите куб и квадрат одного и того же числа.

ПОЧТОВЫЙ ШТЕМПЕЛЬ

В отделении связи на конвертах ставят почтовый штемпель, состоящий из трех чисел: первое — число месяца, второе — номер месяца, третье — две последние цифры года. Число от числа отделено точкой. Например, 17.8.76 означает 17 августа 1976 года.

Попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Могут ли цифры почтового штемпеля (без учета точек) образовать число, являющееся кубом? Если да, приведите все такие случаи.

2. Можно ли заменить на штемпеле одну из точек знаком равенства, чтобы получилась верная запись умножения? Если да, приведите примеры.

3. Можно ли заменить одну из точек на почтовом штемпеле знаком равенства, а другую — знаком деления, чтобы получилась верная запись? Если да, приведите примеры.

4. Сколько раз в столетие штемпель состоит из одинаковых цифр?

5. Сколько раз в столетие сумма трех чисел почтового штемпеля оказывается квадратом числа?

6. Сколько раз в столетие почтовый штемпель (без учета точек) представляет собой квадрат числа?

7. Будем считать точки знаком умножения. Может ли произведение трех чисел почтового штемпеля (причем последнее не 00) оказаться квадратом; кубом числа? Как часто на протяжении столетия это может случиться?

ЗАДАЧА О ЛИНЕЙКЕ

Представим себе линейку длиной x сантиметров, на которой нанесены деления через 1 см: 1, 2, 3, ..., x — 1 (деления 0 и x не нанесены за ненадобностью). Постепенно часть делений стерлась, т. е. не осталось ни метки, ни соответствующего числа. Можно ли теперь с помощью оставшихся меток отмерять отрезки длиной от 1 до x см (в см) одним приложением линейки?

Оказывается, в некоторых случаях можно. Если сохранилась примерно четвертая часть делений, то оставшихся делений может оказаться достаточно для выполнения задания.

Пусть, например, данная линейка имеет длину 13 см. Какие четыре деления сохранились, если оставшихся достаточно для откладывания одним приложением линейки отрезков длиной 1, 2, 3, ..., 12 см?

Решение не единственное. Вот один из возможных ответов: 1, 6, 9, 11.

Действительно, кроме названных меток, есть еще две — 0 и 13 (края линейки). Поэтому нужные величины легко найти, подбирая крайние точки отсчета: 1 — 0 = 1, 11 — 9 = 2, 9 — 6 = 3, 13 — 9 = = 4, 6 — 1 = 5, 6 — 0 = 6, 13 — 6 = 7, 9 — 1 = 8, 9 — 0 = 9, 11 — 1 = 10, 11 — 0 = 11, 13 — 1 = 12.

Для другой длины линейки количество сохранившихся меток должно быть иным. В частности, для линейки в 10—13 см достаточны 4 метки, при длине 14—17 см нужны 5 меток, при длине 18—22 см нужны 6 меток, при длине 23—27 см нужны 7 меток, при длине 28—33 см нужны 8 меток, при длине 34 — 40 см нужны 9 меток и т. д.

В каждом случае решений много, но найти любое из них не так уж просто. Можно легко убедиться, что из делений 1, 2, x — 2, x — 1 два должны сохраниться. Определение остальных требует настойчивости и внимания.

Попробуйте найти необходимые сохранившиеся метки при длине линейки в 15, 20, 22, 26, 33, 40 см.

Последнее условие имеет свою историю. В таком варианте задача была предложена газетой «Junge Welt» (ГДР), причем было сказано, что сохранилось 10 меток. Однако, как мы указывали, хватит 9 меток. Укажем на одно из решений, предоставив читателям найти другие: 1, 2, 3, 4, 10, 17, 24, 29, 35.

Действительно, 1 = 1 — 0, 2 = 2 — 0, 3 = 3 — 0, 4 = 4 — 0, 5 = 29 — 24, 6 = 10 — 4, 7 = 24 — 17, 8 = 10 — 2, 9 = 10 — 1, 10 = 10 — 0, 11 = 40 — 29, 12 = 29 — 17, 13 = 17 — 4, 14 = = 17 — 3, 15 = 17 — 2, 16 = 17 — 1, 17 = 17 — 0, 18 = 35 — 17, 19 = 29 — 10, 20 = 24 — 4, 21 = 24 — 3, 22 = 24 — 2, 23=24—1, 24 = 24 — 0, 25 = 29 — 4, 26 = 29 — 3, 27 = 29 — 2, 28 = 29—1, 29 = 29 — 0, 30 = 40 — 10, 31 = 35 — 4, 32 = 35 — 3, 33 = 35—2, 34 = 35 — 1, 35 = 35 — 0, 36 = 40 — 4, 37 = 40 — 3, 38 = 40 — 2, 39 = 40 — 1, 40 = 40 — 0.

Эти задачи дают материал для соревнований читателей: кто скорее найдет одно решение или кто найдет за указанное время больше решений.

ПОЕЗДКИ В ТАКСИ

1. На стоянке А трое сели в такси. В пункте Б один сошел, уплатив треть показаний счетчика. В пункте В сошел второй, уплатив половину показаний счетчика. Третий сошел в пункте Г, уплатив столько, сколько оба первых вместе. Общая сумма соответствовала показаниям счетчика. Зная, что пункт Б находится вдвое ближе к А, чем пункт В, а пункт В вдвое ближе к А, чем пункт Г, определите, сколько уплатил каждый из пассажиров.

2. Трое сели в такси в пункте А. Первый сошел в пункте Б, уплатив $\frac{1}{3}$ показаний счетчика. Второй сошел в В, уплатив $\frac{1}{3}$ показаний счетчика. Третий сошел в Г, уплатив вдвое больше второго. Зная,

что длины участков пути АБ, БВ, ВГ пропорциональны числам 2, 3, 4 и что пассажиры уплатили точно по счетчику, определите, сколько они уплатили вместе.

3. Четверо пассажиров сели в такси и выходили из него поочередно через равные промежутки пути. Первый, уходя, уплатил четверть показаний счетчика, второй — треть показаний счетчика, третий — половину показаний счетчика. Четвертый оставил 30 копеек. Общая сумма точно соответствовала показаниям счетчика при выходе последнего пассажира. Какую сумму внес каждый из пассажиров?

4. Пять пассажиров сели в такси и выходили из него поочередно через равные промежутки путн. Первый оставил $\frac{1}{5}$ показаний счетчика, второй — также $\frac{1}{5}$ показаний счетчика, третнй — $\frac{1}{4}$ показаний счетчика, четвертый — $\frac{1}{3}$ показаний счетчика. Пятый уплатил недостающую до показаний счетчика сумму 93 к. Определите конечные показания счетчика.

ЗАДАЧИ НА РАСКРАСКУ

1. Все вершины правильного пятиугольника закрашены либо белым цветом, либо черным. Верно ли, что при любой раскраске найдутся два несовпадающих конгруэнтных треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника, у которых соответственные вершины закрашены одинаково?

2. Даны шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Соединив каждую пару точек отрезком, закрасили отрезки либо красным цветом, либо синим. Можно ли быть уверенным, что среди образовавшихся треугольников найдется такой, у которого все стороны закрашены одним цветом?

3. От шахматной доски отрезали две клетки — концы большой диагонали (a1 и h8). Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники равной площади?

4. Можно ли обойти доску шахматным конем (ступая в клетку ровно один раз), начав с поля a1 и кончая полем h8?

5. На рисунке 32 показаны пять фигурок так называемого тетрамино. Каждая из них состонт нз четырех единичных квадратов. Можно ли из всех этих фигур сложить прямоугольннк?

6. Докажите, что из следующих шести фигур, каждая из которых состоит из шести единичных квадратов (рис. 33), нельзя сложить прямоугольник.

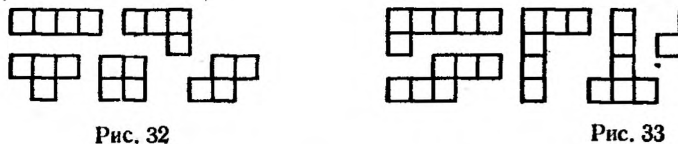
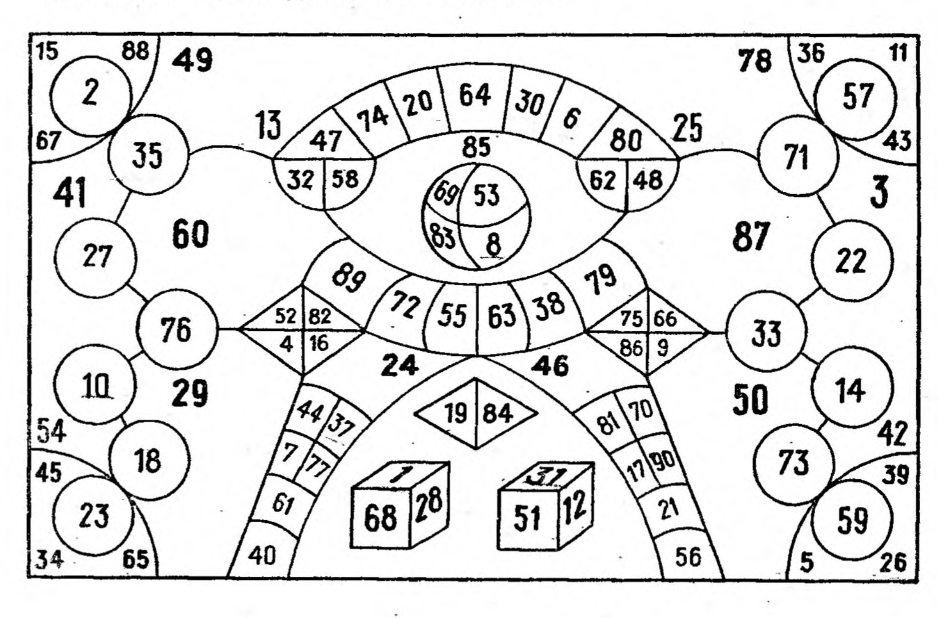
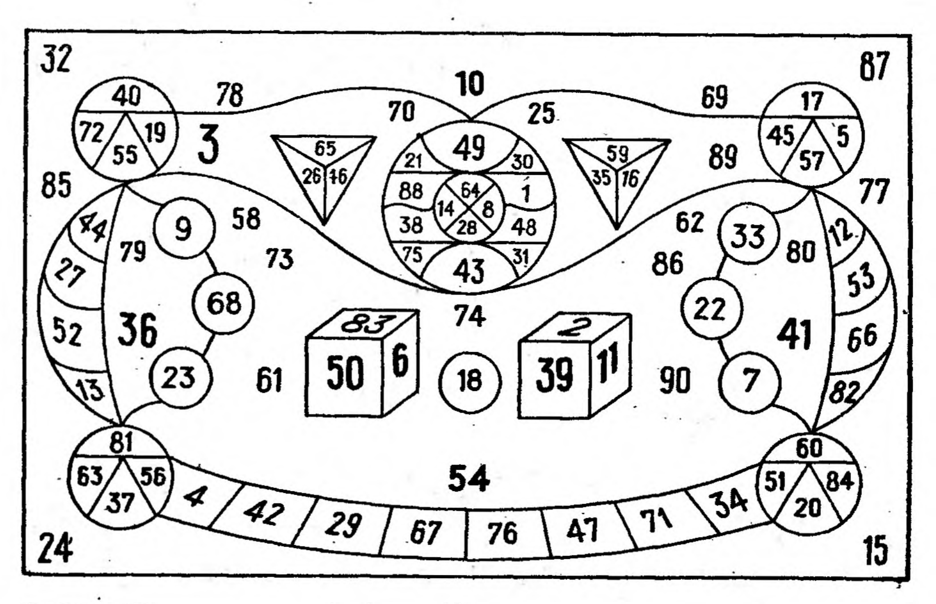


Рис. 32 Рис. 33

ПРОВЕРЬТЕ СВОЮ НАБЛЮДАТЕЛЬНОСТЬ

В каждой из этих карточек нужно последовательно отыскать числа 1, 2, 3, ..., 90. Если вы это сможете сделать за 7—8 минут, то можете считать себя наблюдательным человеком.





С АЛГЕБРОЙ И БЕЗ НЕЕ

Предложенные ниже задачи соответствуют: 1—47 IV классу, 48 — 65 V классу, 66 — 82 VI классу, 83 — 116 VII классу.

1. Автобус выехал из города A в город B. Когда он поравнялся со столбом 190-го километра, водитель заметил, что осталось ехать втрое больше, чем проехали. Около столба 146-го километра он сказал, что осталось ехать втрое меньше, чем проехали. На каком километре находится город B?

2. Автобус выехал из A в 8 часов утра. В половине девятого он проехал мимо столба 46-го километра, а в 9 часов въехал в B. Через 28 километров он прибыл в C, а пятнадцатью минутами позднее проехал мимо столба 110-го километра. Еще через четверть часа он прибыл в конечный пункт D. Считая скорость автобуса постоянной, найдите расстояние от A до D.

3. У мальчика было 12 монет по 10 к. и 15 к. Уплатив две из них, он купил книгу. За альбом вдвое большей стоимости ему пришлось отдать три свои монеты. Оставшихся денег хватало ровно на покупку еще двух таких альбомов. Сколько каких монет было у мальчика вначале?

4. Расстояние между двумя городами 666 км. На каждом километровом столбе написаны два числа, указывающие расстояния до концов маршрута: 0 — 666, 1 — 665, 2 — 664... На скольких столбах надписи сделаны с употреблением только двух цифр?

5. У мальчика 12 карандашей: зеленых и желтых поровну, а красных вдвое больше, чем синих. Сколько карандашей каждого цвета у мальчика?

6. На стоянке стояли автомобили и мотоциклы — с коляской и без нее. У этих 15 машин — 56 колес. Сколько каких машин было на этой стоянке?

7. На лугу паслись 25 животных. Коров было втрое больше, чем лошадей, а овец вдвое больше, чем свиней. Зная, что не все лошади были одной масти, определите, сколько каких животных паслось на лугу.

8. Отцу, матери и двум сыновьям вместе 87 лет. Отец старше матери на 3 года. Один из сыновей в два раза старше другого. Квадрат возраста младшего сына равен возрасту отца. Сколько лет каждому члену этой семьи?

9. Отцу, матери и трем дочкам вместе 88 лет. Возраст матери на 10 лет больше, чем возраст всех дочерей. Разница возрастов родителей равна возрасту младшей дочери. Одна из дочерей на 2 года моложе другой и на столько же старше третьей. Сколько лет родителям?

10. Напишите наибольшее число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

11. Напишите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна произведению двух предыдущих цифр.

12. Произведение нескольких последовательных нечетных чисел кончается цифрой 9. Найдите количество этих множителей.

13. Восстановите запись вычислений четвероклассника, зная, что результат первого действия дал множимое для второго действия, а результат второго действия дал множимое для третьего действия.

1) *1* + *1 = ***   2) *8* · ** = 1***   3) **** · ** = 7***7.

14. Для нумерации страниц словаря потребовалось 1980 цифр. Сколько страниц в словаре?

15. Написаны одно за другим натуральные числа: 123456789101112... Какая цифра стоит на 1985-м месте?

16. Если треть числа разделить на его семнадцатую часть, то в остатке получится 100. Найдите это число.

17. Даны числа 273 437 и 272 758. Найдите натуральное число, при делении на которое первое дает остаток 17, а второе дает остаток 13.

18. Сумма двух чисел 51. Если в большем зачеркнуть одну цифру, то получится меньшее. Найдите эти числа.

19. Разность двух чисел 52. Если в большем зачеркнуть цифру, то получится меньшее. Найдите эти числа.

20. Разность двух чисел 470. Если в одном зачеркнуть цифру, то получится другое число. Найдите эти числа, зная, что одно из них является квадратом.

21. Разность двух чисел 3040. Если в большем зачеркнуть цифру десятков, то получится меньшее число. Найдите эти числа, зная, что одно из них — куб.

22. Сумма трех чисел 4426. Если в большем зачеркнуть цифру десятков, то получится второе число. Если в большем зачеркнуть цифру единиц, то получится третье число. Найдите эти числа.

23. Найдите число, которое меньше 328 на сумму своих цифр.

24. Найдите число, которое меньше 2717 на сумму своих цифр.

25. Найдите двузначное и четырехзначное числа, зная, что их сумма 2750, а сумма чисел, записанных в обратном порядке теми же цифрами, 888.

26. Найдите двузначное и трехзначное числа, зная, что их сумма 177, а сумма чисел, записанных в обратном порядке теми же цифрами, 483.

27. Найдите два числа, зная, что их сумма 1576, а сумма чисел, записанных в обратном порядке теми же цифрами, 4375.

28. Девятизначное число можно разбить на четырехзначное и пятизначное двумя способами. В одном случае сумма частей равна 45 416, а в другом 51 167. Найдите это девятизначное число.

29. Пятизначное число можно разбить на двузначное и трехзначное двумя способами. В одном случае произведение частей равно 10 336, а в другом 4020. Найдите это пятизначное число.

30. Восстановите запись вычитания, в которой все цифры заменены буквами, причем разные буквы могут обозначать одну цифру:

$$\overline{\text{АБВГ}} - \overline{\text{АБВ}} - \overline{\text{АБ}} - \text{А} = 1988.$$

31. Произведение пяти последовательных натуральных чисел в 120 раз больше числа $\overline{\text{АВАВАВ}}$. Найдите эти множители.

32. Произведение трех последовательных нечетных чисел в 5 раз меньше числа $\overline{\text{БАБАБА}}$. Найдите это число.

33. Для какого дня текущего года номер дня с начала года равен произведению числа на номер месяца?

34. В некотором месяце три вторника пришлись на четные числа. Какого числа была в этом месяце последняя пятница?

35. Может ли ни одно первое число месяца в году не оказаться воскресеньем?

36. Какое наибольшее количество пятниц в году может оказаться тринадцатым числом?

37. Число кончается цифрой 7. Если ее перенести с последнего места на первое (передвинув все остальные цифры на одно место вправо), то число увеличится в 4 раза. Сколько таких чисел в первом триллионе натуральных чисел?

38. Число кончается цифрой 7. Если ее перенести с последнего места на первое, то число увеличится втрое. Найдите наименьшее из таких чисел.

39. На циферблате часов в точках III, VI, IX, XII написано по цифре. Идя по ходу часовой стрелки, можно составить из этих цифр две пары двузначных чисел. Произведение одной пары чисел 2795, другой 1944. Найдите написанные цифры.

40. Пловец, плывший против течения, потерял под мостом флягу, но заметил это только через 3 мин. Он сразу поплыл назад и догнал флягу в 150 м от моста. Какова скорость течения на этом участке реки?

41. Окунь вызвал карася на состязание в скорости плавания. Хитрый карась предложил окуню проплыть от коряги до моста, тот затратил на это 12,5 с. Карась проплыл от моста до коряги за такое же время и заявил, что состязание окончилось вничью. Но арбитр состязания — сом — предложил каждому из них проплыть ту же дистанцию в обратном направлении. На этот раз окунь затратил всего 10 с. Считая, что собственная скорость пловцов была оба раза одинаковой, определите, сколько времени плыл карась от коряги до моста.

42. Два ежа устроили состязание по скоростному бегу. Первый на своем пути не встретил никаких препятствий, а на пути второго оказались две огромные черепахи, и он, не сворачивая с пути, побежал по их спинам. Одна черепаха длиной в 1 м двигалась ему навстречу со скоростью 6 см/мин, вторая длиной 0,5 м двигалась в том же направлении, что и еж, со скоростью 16 см/мин. Оба ежа затратили на пробег одинаковое время. Кто из них был лучшим бегуном?

43. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу один другому два велосипедиста и встретились в 70 км от A. В конечных пунктах они отдыхали по часу и выехали назад с прежними скоростями. Вторая встреча состоялась в 40 км от A. Найдите расстояние от A до B.

44. Не дождавшись трамвая, два пешехода пошли к следующей остановке. Когда они прошли треть пути, показался трамвай. Один из пешеходов вернулся и попал на остановку одновременно с трамваем. Другой шел дальше, и трамвай догнал его на следующей остановке. Во сколько раз скорость трамвая больше скорости пешехода?

45. Из пункта A в пункт B, до которого 30 км, в полдень отплыли плот и катер. Достигнув B, катер немедленно повернул назад и встретил плот в 10 км от A. Скорость катера 15 км/ч. Когда катер прибыл в B?

46. Путь от A до B состоит из спусков и подъемов. На подъеме скорость велосипедиста 20 км/ч, на спуске 30 км/ч. От A до B он ехал 3 ч, а назад — на 20 мин больше. Найдите расстояние от A до B.

47. Велосипедист едет по горизонтальной дороге со скоростью 15 км/ч, на подъеме его скорость 12 км/ч, на спуске 20 км/ч. На дорогу от A до B и обратно он затратил час. Найдите расстояние от A до B.

48. Какая из дробей больше: $\frac{222222221}{333333332}$ или $\frac{444444443}{666666665}$?

49. Сравните две дроби: $\frac{2222221}{2222223}$ и $\frac{3333331}{3333334}$.

50. В 10 ч велосипедисты выехали навстречу один другому из пунктов A и B с постоянными скоростями. Первый прибыл в B в час дня, а другой — в A без четверти два. В котором часу они встретились между A и B?

51. Группа рационализаторов получила премию. Руководителю выделена четверть премии. Если бы премию разделили поровну, руководитель получил бы на 45 р. меньше. Если бы в группе было на два человека меньше, то даже при равном распределении он получил бы больше, чем фактически. Определите размер премии.

52. По окончании учебного года каждый из трех сыновей получал от отца в подарок столько книг, сколько лет проучился в школе. Через некоторое время у них собралось 25 книг. Сколько классов окончил к этому времени каждый из сыновей?

53. Возрасты двух внуков равны соответствующим цифрам возраста бабушки. Всем троим вместе 72 года. Сколько лет каждому внуку?

54. Отцу и двум его сыновьям вместе 51 год. Возраст отца в 6 раз больше суммы цифр общего возраста сыновей. Сколько лет отцу?

55. Отцу и двум сыновьям вместе 41 год. Возраст отца в 6 раз больше суммы цифр общего возраста всех троих. Сколько лет каждому из них?

56. В классе 38 учащихся. Каждый из них занимается хоть одним видом спорта из числа следующих: легкая атлетика, волейбол, плавание. Легкой атлетикой занимаются 19 человек, волейболом — 21 человек, плаванием — 12 человек, причем легкой атлетикой и волейболом — 7 человек, волейболом и плаванием — 3 человека. Сколько учащихся занимаются всеми тремя названными видами спорта?

57. Числа x и $x + 1$ имеют нечетные суммы цифр. Сколько таких чисел x среди первой тысячи натуральных чисел?

58. Четырехзначное число делится на 7 и на 29. После умножения на 19 и деления на 37, получится остаток 5. Найдите это число.

59. Вместо x и y напишите такие цифры, чтобы шестизначное число $853xy6$ делилось на 468.

60. Восстановите стертые цифры числа $47 * 3 * 4$, зная, что это шестизначное число делится на 504 без остатка.

61. Дано число 124 536. Припишите к нему (в начале, в середине или в конце) одну цифру, чтобы получилось семизначное число, которое делится на 792 без остатка.

62. На двух скамейках сидят по шесть детей. Все они разного возраста, но сумма прожитых лет и произведение прожитых лет (числа берут целыми) у сидящих на одной скамейке такие же, как у сидящих на другой скамейке. Старшему из детей 16 лет. Какой возраст детей, сидящих с ним на одной скамейке?

63. Найдите все пары простых чисел, у которых сумма и разность — простые числа.

64. Найдите наименьшее возможное число $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9}$, зная, что $\overline{x_1x_2}$ делится на 2, $\overline{x_1x_2x_3}$ делится на 3 и т. д.

65. Найдите n-значное число, у которого первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая — количеству единиц в числе, третья — количеству двоек в числе и т. д. Решите задачу для $n = 4, 5, 7, 8, 9, 10$.

66. В примере нужно было перемножить два двузначных числа и полученное произведение разделить на трехзначное число, все цифры которого различны. Не заметив знака умножения, ученик разделил четырехзначное число на трехзначное и получил ответ вдвое больше верного. Найдите все три названных числа.

67. На доске написаны три различных двузначных числа. Надо было два первых перемножить и произведение разделить на третье число. Ученик перепутал действия и поэтому вместо правильного ответа 96 получил второе число. Какие три числа были написаны?

68. Два различных двузначных простых числа написаны один за другим. Полученное число делится на полусумму этих простых чисел. Найдите все пары таких простых чисел.

69. Сколько существует натуральных чисел, не превышающих 1000, в записи которых употреблена хотя бы одна девятка?

70. Найдите n-значное число, которое больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, в 4 раза.

71. Перемножены первые 100 натуральных чисел. Назовите в произведении 25-ю цифру справа.

72. Верно ли, что произведение четырех последовательных натуральных чисел кончается нулем или 024?

73. Произведение четырех последовательных нечетных чисел кончается девяткой. Какая цифра стоит перед девяткой?

74. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является квадратом числа.

75. Использовав все цифры по одному разу, напишите 5 чисел, одно из которых в 2, 3, 4, 5 раз меньше остальных.

76. Использовав все значащие цифры по одному разу, напишите три числа, одно из которых меньше других в 3 и 5 раз.

77. Турист проделал путь в автомобиле, на мотоцикле и пешком. Скорости его движения были пропорциональны числам 9, 5, 1. Известно, что на автомобиле он ехал на полчаса больше, чем на мотоцикле, но на полчаса меньше, чем шел пешком. Обратный путь он проделал на мотоцикле. В каком случае и на сколько больше израсходовано времени?

78. У какого трехзначного числа любая натуральная степень кончается одними и теми же тремя цифрами?

79. От двух кусков сплавов (с различным содержанием свинца) массой 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы отрезанных кусков?

80. Мальчики спорили о длине трубы, которую трактор тянул на полозьях. Чтобы выяснить, кто прав, мальчик с длиной шага 0,75 м пошел вдоль трубы. Когда он шел в направлении движения трактора, то сделал 120 шагов, в другом направлении он сделал вдоль трубы 30 шагов. Какова длина трубы?

81. В магазине спорттоваров туристы покупали снаряжение. Первый за 18 р. купил топорик и спальный мешок, второй за 40 р. купил топорик, два спальных мешка и рюкзак, третий за 66 р. купил рюкзак, спальный мешок и палатку. Сколько уплатил четвертый за три топорика, четыре спальных мешка, рюкзак и две палатки?

82. Найдите 5 чисел, попарные суммы которых равны 3, 5, 6, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 17.

83. Сумма номеров домов на одной стороне квартала 247. Найдите номер дома седьмого от угла.

84. Сумма номеров домов на одной стороне квартала 186. Зная, что один из этих домов имеет номер 28, определите, каким номером начинается та же сторона следующего квартала.

85. Идя вдоль трамвайного пути со скоростью 4,5 км/ч, пешеход за некоторое время насчитал 66 встречных трамваев и 30 обогнавших его. С какой скоростью движутся трамваи на этом участке?

86. Написаны 1983 числа. Известно, что сумма любых пяти из них положительна. Положительна ли сумма всех этих чисел?

87. Как разбить числа 1, 2, 3, ..., 15 на две группы так, чтобы оказались равными суммы чисел, суммы квадратов чисел и суммы кубов чисел в группах?

88. На трех лугах, площади которых пропорциональны числам 4, 5, 6, пасутся коровы. На первом 14 коров могут пастись 12 дней, на втором 17 коров — 20 дней. Сколько дней могут пастись на третьем лугу 24 коровы, если на всех лугах трава растет равномерно и с одинаковой скоростью, а коровы съедают и ту траву, которая была, когда они пришли на луг, и ту, которая выросла за время их пребывания на лугу?

89. В начале олимпиады ученик посмотрел на часы. Это было между 10 и 11 часами. Окончив работу между 1 и 2 часами дня, он еще раз посмотрел на часы и заметил, что за это время часовая и минутная стрелки точно поменялись местами. Когда он окончил работу?

90. У четырех лиц, родившихся в разные годы после Великой Октябрьской социалистической революции, в 1973 г. суммы цифр возрастов оказались одинаковыми. Сумма их годов рождения является квадратом. Каков возраст младшего?

91. Два покупателя купили 5 и 31 одинаковых блокнотов. Первый дал кассиру 5 р., второй — 25 р. В сдаче первого было столько рублей и копеек, сколько копеек и рублей было в сдаче второго. Определите цену блокнота.

92. У Нины дома большой живой уголок. Однажды она с мешочком орехов подошла к своим любимцам. Взяв себе орешек, она отсыпала четверть остатка белкам. Затем она поступила так же у клеток бурундука и морских свинок. Оставшиеся орехи она разделила поровну между четырьмя клетками попугаев. Какое наименьшее число орехов могло быть в мешочке Нины?

93. При каких натуральных числах x и y выражение $\frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2}$ равно 1980?

94. При каких натуральных числах a, b, c выражение $abc + ab + ac + bc + a + b + c$ равно 2000?

95. Однажды дед заявил, что если считать целые годы, то он прожил в 2,4 раза больше, чем оба внука вместе. Бабушка сказала, что она старше одного внука в 4 раза, а другого — в 5 раз. Сколько лет внукам?

96. На вопрос о возрасте Катя сказала, что ей столько лет, сколько было дней рождения у деда. Катя и ее младший брат родились между двумя днями рождения деда. Всем троим вместе 107 лет. Сколько лет Кате?

97. Можно ли так занумеровать вершины куба, чтобы суммы номеров на концах каждого ребра оказались различными?

98. Кубический корень из числа равен количеству тысяч в числе. Найдите это число.

99. Найдите две последние цифры числа 2^{1979}.

100. Найдите четыре последние цифры числа 5^{1979}.

101. Какими двумя цифрами кончается число 8^{8^8}?

102. Каким количеством нулей кончается число $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$?

103. При каких натуральных x число $x^x + 1$ является квадратом?

104. Вычислите простейшим образом:

а) $\dfrac{2,47374^4 - (4,94748^2 - 3,71071^2)^2}{4,94748^4 - (7,42122^2 - 6,18435^2)^2}$;

б) $1,2345^4 + 0,7655^4 - 1,2345^3 \cdot 0,7655^2 - 1,2345^2 \cdot 0,7655^3 + 4,938 \cdot 3,062$;

в) $0,34782^3 + 0,65128^3 + 3\,(0,34782^3 \cdot 0,65218 + 0,34782 \times 0,65218^3) + 6\,(0,34782^3 \cdot 0,65218^2 + 0,34782^2 \cdot 0,65218^3)$;

г) $8765412 \cdot 8765416 \cdot 8765418 \cdot 8765422 - 8765413 \cdot 8765415 \times 8765419 \cdot 8765421 + 6 \cdot 8765411 \cdot 8765423$;

д) $\dfrac{24,172^3 + 25,172^3 - 25,672^3 + 26,172^3 + 27,172^3}{24,172^2 + 25,172^2 - 3 \cdot 25,672^2 + 26,172^2 + 27,172^2}$;

е) $(876543222 \cdot 876543221 \cdot 876543219 \cdot 876543218 - 876543216 \times 876543215 \cdot 876543213 \cdot 876543212) : (1753086439^2 + 1753086436^2 + 1753086427^2)$;

ж) $(1,2319^4 + 0,7681^4 + 1,2319^3 \cdot 0,7681 + 1,2319 \cdot 0,7681^3 - 2,2319 \cdot 1,7681) : 0,4638^2$.

105. Найдите все натуральные x, при которых простыми числами окажутся: а) $x^2 + 1$, $(x + 2)^2 + 1$, $(x + 4)^2 + 1$; б) $x^2 - 20$, $x^2 + 4$, $x^2 + 6$.

106. Известно, что p — простое число больше 5. Найдите возможные величины остатка от деления а) p^2 на 30; б) p^4 на 120.

107. Найдите множество целых чисел x, при которых число $x^3 + 9x + 2$ — куб.

108. Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Чему равняется $a^4 + b^4 + c^4$?

109. Найдите число, которое больше суммы своих цифр в: а) 17; б) 165 раз?

110. Верно ли, что разность квадратов числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, делится на 99?

111. Можно ли представить числа 19781979 в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

112. Из натурального числа вычли сумму его цифр. Затем то же проделали с полученным числом. Если так будут продолжать и дальше, каким числом закончатся вычисления?

113. Два корабля двигаются прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В полдень корабли и порт располагались в вершинах равностороннего треугольника. Когда второй корабль прошел 90 км, то корабли и порт расположились в вершинах прямоугольного треугольника. Когда первый корабль прибыл в порт, второму оставалось пройти еще 37,5 км. Найдите расстояние между кораблями в полдень.

114. Квадрат натурального числа, увеличенный на 5, при делении на 161 дает неполное частное от деления искомого числа на 4. Найдите это число.

115. Из A к B по 50-метровой дорожке побежали два мальчика. Второй начал бег на 1 с позже первого и догнал его через 10 м. Достигнув B, он сразу повернул обратно и встретил первого через 9 с после своего старта. На каком расстоянии от B они встретились?

116. p — корень уравнения $x^2 - 5x + 5 = 0$. Найдите:

$$p^4 - 75p + 75.$$

117. Автобус в полдень на 210-м километре догнал группу туристов, шедших со скоростью 5 км/ч, а через 3 ч встретил мотоциклиста, ехавшего со скоростью 30 км/ч. Второй автобус, следовавший за первым с той же скоростью, догнал туристов в 2 часа дня, а мотоциклиста встретил за 36 мин до того, как проехал столб 80-го километра. На сколько второй автобус отставал от первого?

118. Найдите корни уравнений:

а) $(2x^2 - x - 3)^4 + (2x^2 - x - 3)^2\,(2x^2 + x - 6)^4 + (2x^2 + x - 6)^6 = 0$;

б) $4\sqrt{x^2 - 24} + 3\sqrt{x^2 - 21} + 2\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = \dfrac{20}{x - 4}$.

119. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1982. Разрешается стереть два числа и записать их неотрицательную разность. Таким образом, каждый раз количество написанных чисел уменьшается на 1. Может ли в конце концов остаться записанным только нуль?

120. Скорость парохода по течению, его скорость против течения и

скорость течения составляют арифметическую прогрессию. Как относятся скорости парохода по течению и против течения?

121. Скорость парохода по течению, его скорость против течения и скорость течения составляют геометрическую прогрессию. Как относятся скорости парохода по течению и против течения?

122. Заполните пустые клетки таблицы числами так, чтобы в каждой строке и столбце они составляли арифметическую прогрессию:

				21
	16			
		27		
1				

123. Заполните пустые клетки таблицы числами так, чтобы в каждой строке и столбце они составляли геометрическую прогрессию:

27			
		36	
	6		
			8

124. Найдите трехзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию. Если к нему прибавить 990, то получится число, цифры которого образуют геометрическую прогрессию.

125. Найдите последнюю цифру суммы квадратов первых 34567 членов арифметической прогрессии 2, 5, 8, ...

126. Существует ли целое число, 47-я степень которого содержит 63 цифры?

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ ГЕОМЕТРИЮ?

Предложенные ниже задачи соответствуют: 1—44 VI классу, 45 — 125 VII классу, 126 — 159 VIII классу.

1. Сколько различных прямых могут определять 5 точек?

2. Могут ли 7 точек плоскости определять 14 прямых? Если да, то как расположены эти точки?

3. Известны расстояния между четырьмя колхозными фермами: от первой до второй 1,5 км, от второй до третьей 9,2 км, от третьей до четвертой 3,6 км, от четвертой до первой 4,1 км. Каково расстояние от первой фермы до третьей?

4. Требуется с помощью линейки и циркуля построить перпендикуляр к данной прямой через данную точку, не принадлежащую прямой. Обычное построение неосуществимо, так как искомый перпендикуляр проходит очень близко к краю листа бумаги.

5. Даны окружность с центром O и точки A и B вне ее. Найдите точки пересечения прямой AB с этой окружностью, выполняя построение лишь одним циркулем.

6. Точки A и B находятся по разные стороны прямой l. Легко найти на этой прямой точку, у которой разность расстояний от точек A и B наименьшая. А как найти на этой прямой точку M, у которой разность расстояний от точек A и B наибольшая?

7. Точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите на этой прямой такую точку M, чтобы $\widehat{AMC} = 2\widehat{BMD}$.

8. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, разделили его угол на три конгруэнтные части. Найдите величину этого угла.

9. Как соединить две точки A и B линейкой в том случае, когда $|AB|$ больше длины линейки? По-видимому, придется пользоваться не только линейкой, но и циркулем. А как именно?

10. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, образует со стороной AB углы, величины которых вдвое больше величин углов A и B. Определите величину каждого угла треугольника ABC.

11. Какие из приведенных записей слов имеют ось симметрии: ТОПОТ, СОН, СЕНО, СОХА, ВЕС, ВОЗ, ТОН, ЭХО, СОСНА, СОК, ПОТОП, ЗОНА, КОН, СОР, САН?

12. Два отрезка конгруэнтны. Можно ли отобразить один из них на другой при повороте? Если да, укажите центр и угол поворота.

13. ABC — прямоугольный треугольник, $[AD]$ и $[BE]$ — биссектрисы его острых углов, $[DK]$ и $[EM]$ — перпендикуляры, проведенные к гипотенузе. Найдите $\widehat{MCK}$.

14. В каком треугольнике середины всех высот принадлежат одной прямой?

15. Высота AD треугольника ABC проходит через середину медианы BE. В каком отношении эта высота делит сторону BC?

16. На конгруэнтных сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABD и ACT. Зная, что существует точка M, которая симметрична D относительно $[AB]$ и симметрична T относительно $[AC]$, найдите величины углов треугольника ABC.

17. M — одна из общих точек двух пересекающихся окружностей. Как построить прямую, содержащую точку M, чтобы данные окружности отсекли на ней различные конгруэнтные хорды?

18. Прямые l_1, l_2, l_3 параллельны. Как построить прямую, содержащую данную точку M, чтобы данные прямые отсекли на ней отрезки с данной разностью длин?

19. Если на прямоугольном бильярде толкнуть шар M так, чтобы он в точке A коснулся борта BC, то шар отразится по лучу AD так, что $\widehat{MAB} = \widehat{DAC}$. Зная это, попытайтесь ответить на вопросы:

1) На бильярде даны два шара. Как следует толкнуть первый шар, чтобы он, коснувшись двух указанных бортов, попал во второй шар? 2) Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника. Шар толкнули по биссектрисе а) острого, б) прямого угла. Отразившись от бортов в точках K, M, T, шар вернулся по пройденному пути. Найдите величины острых углов треугольника.

20. Докажите, что треугольник можно разрезать на любое натуральное число $n > 2$ тупоугольных треугольников.

21. Докажите, что треугольник можно разрезать на любое натуральное число $n > 3$ равнобедренных треугольников.

22. Величины двух углов треугольника пропорциональны числам 1 и 3. Докажите, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

23. Постарайтесь разрезать равносторонний треугольник на пять равнобедренных треугольников. При этом один из треугольников может оказаться равносторонним. Однако возможны и такие решения, при которых равносторонних треугольников не получится.

24. Периметр равностороннего треугольника 33. Как разрезать этот треугольник на возможно меньшее число равносторонних треугольников с целочисленными сторонами?

25. Даны две окружности и прямая l. Постройте отрезок длины a, имеющий концы на данных окружностях и параллельный прямой l.

26. Постройте семиугольник по серединам всех его сторон.

27. Постройте пятиугольник по серединам всех его диагоналей.

28. Суммы углов семиугольника, прилегающих к его сторонам, соответственно равны 257, 224, 243, 286, 303, 234, 253°. Найдите величину каждого угла.

29. Угол выпуклого равностороннего пятиугольника вдвое больше угла между диагоналями, исходящими из вершины названного угла. Найдите величину угла между этими диагоналями.

30. У треугольника может быть три острых угла, у параллелограмма может быть два острых угла. А какое наибольшее количество острых углов может оказаться у произвольного выпуклого многоугольника?

31. Найдите сумму величин углов звездчатого пятиугольника (рис. 34).

32. Постройте треугольник ABC, у которого вершина A находится в данной точке, а биссектрисы углов B и C принадлежат данным прямым l_1 и l_2.

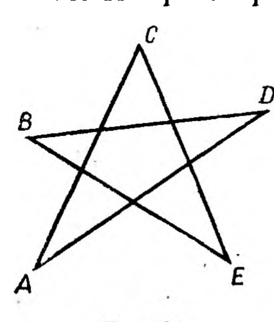


Рис. 34

33. На плоскости даны $n > 3$ точек, не все из которых принадлежат одной прямой. Докажите, что существует такой многоугольник (без самопересечения сторон), на сторонах которого находятся все данные точки.

34. Пусть дан некоторый 1979-угольник. Докажите, что прямая, не проходящая через его вершину, не пересекает всех сторон этого многоугольника.



35. Внутри выпуклого n-угольника взяты k точек так, что из числа этих точек и вершин многоугольника никакие три не принадлежат одной прямой. Соединив отрезками эти точки и вершины многоугольника, разделили многоугольник на непересекающиеся треугольники, у которых вершинами оказались только точки из числа $n + k$ названных, причем каждая из этих точек — вершина хоть одного из полученных треугольников. Сколько получилось треугольников?

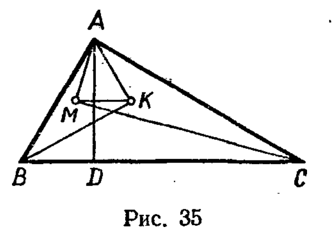


Рис. 35

36. Периметр пятиугольника 160,8 см. Длины четырех сторон в сантиметрах выражены целыми числами и пропорциональны числам 6, 7, 9, 11. Найдите длину пятой стороны.

37. Постройте равносторонний треугольник по середине основания и точкам K и T, через которые проходят боковые стороны (или их продолжения).

38. Постройте треугольник по середине основания и серединам высот, проведенных к боковым сторонам.

39. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота AD; $[AE]$ — биссектриса угла DAC. Верно ли, что $|AB| = |BE|$?

40. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Биссектрисы углов CAD и B пересекаются в точке K, а биссектрисы углов C и BAD — в точке M. Параллельны ли прямые KM и BC? (Рис. 35.)

41. Биссектриса угла треугольника пересекает сторону под углом в 85° и биссектрису одного из углов под углом в 54°. Найдите величины углов треугольника.

42. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC соответственно взяты точки K, M и T так, что $|AK| : |KB| = |BM| : |MC| = |CT| : |TA| = 1 : 2$. Как по точкам K, M и T построить треугольник ABC?

43. Постройте параллелограмм $ABCD$ по данной стороне CD и расстояниям от вершин A и B до данной точки M.

44. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершинам A и C и расстояниям от вершин B и D до данной точки M.

45. Биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла треугольника ABC, отсекли равнобедренный треугольник DEA. Найдите величины его углов.

46. В треугольнике ABC $\widehat{A} = 60°$. На стороне BC есть такая точка M, что $|BM| = 2\,|MC|$, причем $\widehat{BMA} = 60°$. Найдите $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$.

47. Найдите величины острых углов прямоугольного треугольника, у которого произведение длин сторон в 4 раза больше произведения длин высот.

48. Две высоты треугольника не меньше сторон, к которым проведены. Найдите величины углов этого треугольника.

49. Длины двух биссектрис внутренних углов равнобедренного тупоугольного треугольника пропорциональны числам 1 и 2. Найдите величины углов треугольника.

50. Стороны AB и BC треугольника ABC конгруэнтны, $\widehat{ABC} = 80°$. Внутри треугольника взята точка M так, что $\widehat{MAC} = 10°$, $\widehat{MCA} = 30°$. Найдите $\widehat{BMA}$.

51. Стороны AB и BC треугольника ABC конгруэнтны, $\widehat{ABC} = 80°$. Вне треугольника взята точка M так, что $\widehat{MAC} = 10°$, $\widehat{MCA} = 30°$. Найдите $\widehat{BMA}$.

52. Все углы выпуклого шестиугольника конгруэнтны. Верно ли, что разности длин его противоположных сторон одинаковы?

53. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, причем сторона BC делит отрезок AM на конгруэнтные части. Зная, что периметр параллелограмма 48 см, найдите длины сторон параллелограмма.

54. M — внутренняя точка треугольника ABC. Построены параллелограммы $AMBC_1$, $BMCA_1$, $AMCB_1$. Пересекаются ли прямые AA_1, BB_1 и CC_1 в одной точке?

55. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки до вершин параллелограмма меньше периметра параллелограмма.

56. Постройте параллелограмм с центром в данной точке O, зная, что вершины параллелограмма принадлежат четырем данным: а) прямым; б) окружностям.

57. M — внутренняя точка четырехугольника. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 симметричны M относительно середин сторон четырехугольника. Докажите, что $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм.

58. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине C и серединам сторон AB и AD.

59. Постройте параллелограмм с данным центром O, зная, что стороны параллелограмма (или их продолжения) содержат соответственно четыре данные точки.

60. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника отсекает на большей стороне отрезок, конгруэнтный меньшей стороне. Найдите величину угла между диагоналями.

61. Серединный перпендикуляр диагонали прямоугольника делит сторону на части, пропорциональные числам 1 и 2. Найдите величину угла между диагоналями.

62. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ выбрана такая точка M, что $\widehat{AMB} = \widehat{AMD}$. Найдите $\widehat{AMB}$, зная, что $|BC| = 2|AB|$.

63. Постройте прямоугольник с центром в данной точке O, зная, что три вершины прямоугольника принадлежат трем данным: а) прямым; б) окружностям.

64. Постройте прямоугольник с центром в данной точке O, зная что середины трех сторон прямоугольника принадлежат трем данным окружностям.

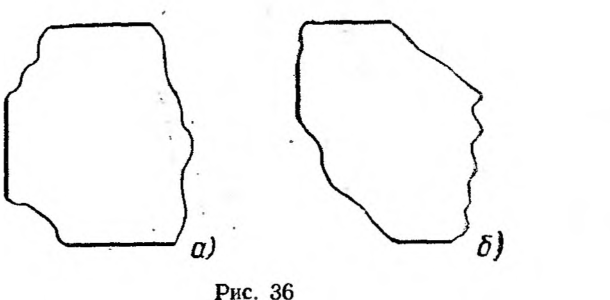


Рис. 36

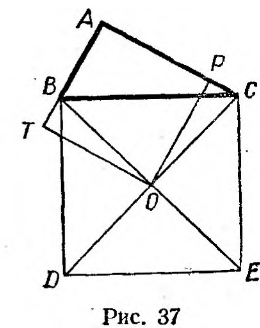


Рис. 37

65. $ABCD$ — ромб. Под каким углом пересекаются биссектрисы углов BAC и BDC?

66. Установите форму четырехугольника, у которого точка пересечения диагоналей равноудалена от всех его сторон.

67. Две высоты ромба, проведенные из вершин тупых углов, пересекаясь, делятся на отрезки, длины которых пропорциональны числам 1 и 2. Найдите величины углов ромба.

68. Постройте ромб, у которого центром является данная точка O, а три вершины принадлежат трем данным прямым.

69. Конгруэнтные отрезки AB, BC и CD принадлежат одной прямой. Постройте квадраты $ABKI$, $BCMK$ и $CDTM$ и найдите $\widehat{KAB} + \widehat{MAC} + \widehat{TAD}$.

70. Найдите положение центра квадрата, у которого недоступны все вершины и одна сторона (рис. 36).

71. На гипотенузе BC треугольника ABC, у которого сумма длин катетов l, вне треугольника построен квадрат с центром O. Отрезки OP и OT перпендикулярны к сторонам угла BAC (рис. 37). Найдите периметр и площадь четырехугольника $PATO$.

72. Постройте квадрат, у которого одна диагональ принадлежит данной прямой, а концы другой диагонали — двум данным окружностям.

73. Постройте квадрат с центром в данной точке O, зная, что концы одной из сторон удалены от данной точки M соответственно на a и b.

74. Постройте квадрат с центром в данной точке O и концами одной из сторон: а) на двух данных окружностях; б) на данной окружности.

75. Постройте квадрат $ABCD$ по его центру O и двум точкам, соответственно принадлежащим прямым AB и CD.

76. На сторонах треугольника ABC вне треугольника построены три квадрата. Как построить треугольник по центрам этих квадратов?

77. Постройте квадрат, у которого три вершины принадлежат трем данным параллельным прямым, а четвертая — данной окружности.

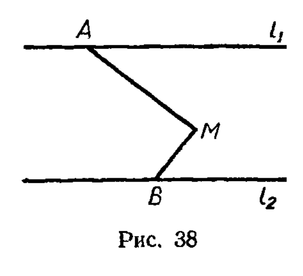


Рис. 38

78. Дан квадрат $ABCD$. Найдите множество точек M, для которых треугольники MAB, MBC, MCD и MAD равнобедренные.

79. Точка T находится внутри квадрата $ABCD$. У равностороннего треугольника KMT вершина K принадлежит какой-либо из сторон квадрата. Найдите множество точек M.

80. Диагональ делит равнобедренную трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите величину угла между диагоналями трапеции.

81. Могут ли диагональ и средняя линия равнобедренной трапеции оказаться конгруэнтными?

82. Длина одного из оснований равнобедренной трапеции втрое больше длины другого основания. Из середины большего основания меньшее видно под углом, в два раза меньшим, чем угол, под которым большее основание видно из середины меньшего. Найдите величины этих углов.

83. Длины оснований трапеции a и b. Отрезок, параллельный основаниям, делится диагоналями на три конгруэнтные части. Найдите его длину.

84. Постройте трапецию, у которой боковые стороны AB и CD принадлежат двум данным прямым, середина диагонали AC — данная точка O, а большее основание (или его продолжение) содержит данную точку M.

85. Составьте трапецию из возможно меньшего числа равнобедренных прямоугольных треугольников.

86. Длины сторон прямоугольника (в см) выражены целыми числами. Зная, что периметр (в см) и площадь (в см^2) выражены равными числами, определите периметр прямоугольника.

87. Граница полей — ломаная AMB, края полей — параллельные прямые (рис. 38). Можно ли заменить ломаную более короткой границей, не меняя площадей полей?

88. Две высоты треугольника делят его на две пары равновеликих частей. Найдите величины углов треугольника.

89. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки до сторон равностороннего треугольника постоянна. Чему равна эта сумма?

90. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого длина гипотенузы a, а величины острых углов пропорциональны числам 1 и 5.

91. Каждая диагональ четырехугольника делит его на две равновеликие части. Что можно утверждать о форме этого четырехугольника?

92. Верно ли, что площадь четырехугольника не превышает произведения полусумм длин его противоположных сторон?

93. Разность длин двух сторон треугольника равна разности высот, проведенных к этим сторонам. Верно ли, что названные стороны лежат против острых углов?

94. Длины сторон треугольника a, b, c, причем $a \leqslant 2 \leqslant b \leqslant 3 \leqslant c \leqslant 4$. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник?

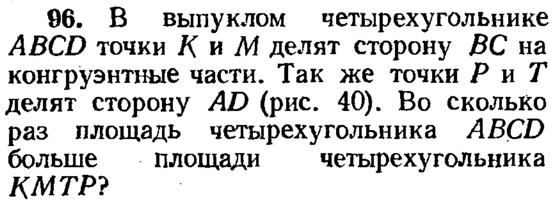


Рис. 39

95. M и K — середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. $[AM] \cap [BK] = O$, $[MD] \cap [KC] = T$ (рис. 39). Сравните площадь четырехугольника $OMTK$ с суммой площадей треугольников OAB и TCD.

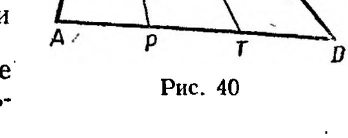


Рис. 40

96. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K и M делят сторону BC на конгруэнтные части. Так же точки P и T делят сторону AD (рис. 40). Во сколько раз площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади четырехугольника $KMTP$?

97. Диагонали делят четырехугольник на четыре треугольника. Можно ли по площадям трех треугольников найти площадь четвертого?

98. $\triangle ABC$ равносторонний. Найдите множество таких точек M, что треугольники MAB и MAC равнобедренные.

99. Даны точки A, B, C, D. Постройте окружность, содержащую точки A и B, чтобы касательные к ней из точек C и D имели равные длины.

100. Биссектрисы AD и CE углов при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Центр окружности, содержащей точки O, D, C, принадлежит стороне AC. Найдите величины углов треугольника ABC.

101. Постройте равносторонний треугольник периметра P, зная, что две вершины треугольника принадлежат двум данным параллельным прямым, а третья — данной окружности.

102. Постройте ромб, у которого две стороны принадлежат двум данным параллельным прямым, а две другие (или их продолжения) проходят через данные точки M и N.

103. Постройте треугольник по прямой, которой принадлежит основание, и концам высот, проведенных к боковым сторонам.

104. На окружности отмечены последовательно точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6; хорды A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6 параллельны. Параллельны ли хорды A_3A_4 и A_6A_1?

105. Постройте параллелограмм $ABCD$ по лучам BA и BC и центру окружности, проходящей через точки A, C, D.

106. Окружность с центром O разделена точками A_1, A_2, A_3, ..., A_n на конгруэнтные части. Найдите сумму $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$.

107. На обломке круга сохранились часть дуги AB без ее концов, часть хорды AB и центр круга O (рис. 41). Найдите построением величину угла AOB.

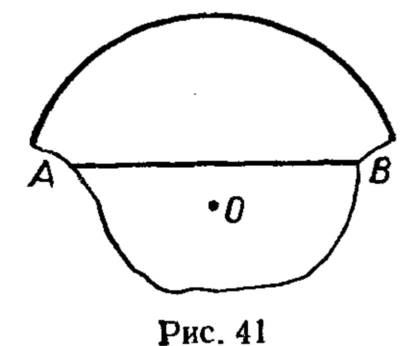


Рис. 41

108. Расстояние между концами двух высот, проведенных из одной вершины ромба, равно половине длины одной из диагоналей. Найдите величины углов ромба.

109. Диагональ BD и сторона ромба $ABCD$ конгруэнтны. Произвольная точка M принадлежит лучу DA и находится вне ромба. Прямая MC пересекает сторону AB в точке T. Под каким углом пересекаются прямые MB и DT?

110. Докажите, что треугольник можно разрезать на любое натуральное число $n > 5$ подобных ему треугольников.

111. Докажите, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника меньше суммы длин гипотенузы и проведенной к гипотенузе высоты.

112. Внутри треугольника ABC на серединном перпендикуляре стороны AB взята точка O. Вне треугольника построены треугольники ACT и BCM, подобные треугольнику ABO, причем у этих трех треугольников соответственные стороны AC, BC, AB. Исследуйте форму четырехугольника $OMCT$.

113. Длины сторон прямоугольника $ABCD$ 63 и 65 см. Из точки M стороны BC отрезки AB и AD видны под углами одной величины. На какие части точка M делит сторону BC?

114. Средняя линия, параллельная гипотенузе, делит треугольник на два многоугольника, периметры которых пропорциональны числам 6 и 11. Найдите величину отношения длин катетов.

115. Наблюдатель видел стену AB из пунктов C и D, расстояние между которыми равно 300 м, под углами 30°, причем пункт D находится строго к югу от A, а пункт C — строго к западу от B. Найдите длину стены.

116. Лестница стоит на улице и упирается одним концом в здание на левой стороне на высоте 9 м или в здание на правой стороне на высоте 12 м, причем оба положения лестницы взаимно перпендикулярны. Найдите длину лестницы и ширину улицы.

117. $[BK]$ и $[CE]$ — высоты ромба $ABCD$, проведенные к (AD). M — середина $[KD]$, P — середина $[CE]$. Найдите величину угла между прямыми AP и BM.

118. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, зная, что площади треугольников ADO и BCO, прилегающих к основаниям трапеции, соответственно равны 45 см² и 20 см².

119. $[BC]$ и $[AD]$ — основания трапеции $ABCD$, диагонали пересекаются в точке O. Зная, что площади треугольников ABO и BCO соответственно равны 50 см² и 20 см², определите площадь трапеции.

120. Как через вершину четырехугольника провести прямую, которая делит четырехугольник на две равновеликие части?

121. Длины оснований трапеции 7 и 23 см. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на равновеликие части. Найдите длину отрезка прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

122. Площадь остроугольного треугольника S. Из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на другие стороны. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами.

123. К какой из вершин треугольника ближе всего точка пересечения биссектрис его внутренних углов?

124. Длины сторон треугольника связаны соотношением: $a^3 + b^3 = c^3$. Какой это треугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

125. Длины сторон и полупериметр треугольника составляют арифметическую прогрессию. Верно ли, что этот треугольник прямоугольный?

126. Постройте треугольник по точкам, в которых биссектрисы внутренних углов треугольника пересекают описанную окружность.

127. Около окружности с центром O описан равнобедренный прямоугольный треугольник; $[AM]$ — биссектриса острого угла этого треугольника. Принадлежит ли центр окружности, содержащей точки O, B, M, гипотенузе $[AB]$?

128. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, разделили угол на три части, величины которых пропорциональны числам 5, 8 и 5. Найдите величины углов треугольника.

129. O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Принадлежит ли центр окружности, проходящей через точки A, B, O, биссектрисе угла ACB?

130. Вершины треугольника ABC находятся в точках I, V, VIII циферблата часов. Проведены высоты AD и BE и перпендикуляр DM к AB. Сравните длины отрезков BM и AE.

131. Вписанная окружность касается сторон ромба соответственно в точках E, H, K, T. Площадь четырехугольника $EHKT$ в 4 раза меньше площади ромба. Найдите величины углов ромба.

132. Центр вписанной окружности и центр описанной окружности симметричны относительно стороны треугольника. Найдите величины углов треугольника.

133. Центр описанной окружности и центр окружности, которая касается основания и продолжений боковых сторон треугольника, симметричны относительно основания. Найдите величины углов треугольника.

134. Каждая сторона выпуклого n-угольника является диаметром круга. Покрывают ли эти круги многоугольник полностью? Если нет, установите, для каких значений n такое покрытие имеет место.

135. В концах диаметра AB полукруга построены касательные, на них отмечены точки C и D. Одна из точек пересечения $[CD]$ с полуокружностью — M. На $[AB]$ взята точка T так, что $[MT] \perp [CD]$. Построены $E = [MA] \cap [CT]$, $K = [MB] \cap [DT]$. Параллельны ли отрезки EK и AB?

136. Точка M принадлежит диаметру AB окружности. Через точку C окружности проведена хорда $[CD] \parallel [AB]$. Зависит ли $|MC|^2 + |MD|^2$ от выбора точки: а) C, б) M?

137. Окружность проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$ и пересекает прямые AB, AC, AD соответственно в точках

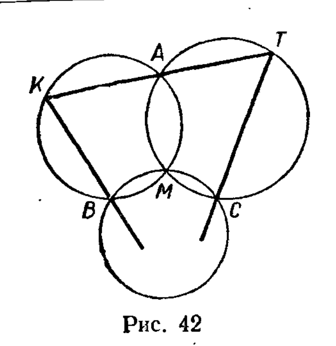


Рис. 42

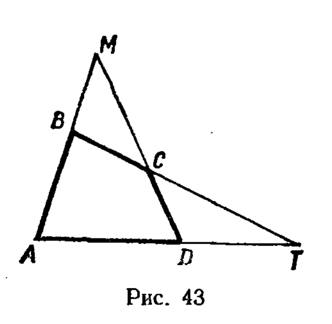


Рис. 43

B_1, C_1, D_1. Верно ли, что

$$|AB|\cdot|AB_1|+|AD|\cdot|AD_1|=|AC|\times|AC_1|?$$

138. Основание треугольника видно под углами равной величины из центра вписанной окружности и из центра описанной окружности. Найдите величины этих углов.

139. Из точки M окружности, описанной около прямоугольника, опущены перпендикуляры на его диагонали. Зависит ли расстояние между концами этих перпендикуляров от выбора точки M?

140. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Из точки их пересечения проведены перпендикуляры ко всем сторонам. Принадлежат ли основания этих перпендикуляров одной окружности?

141. Три окружности, содержащие точку M, попарно пересекаются в точках A, B, C. Прямая, содержащая точку A, пересекает две окружности, содержащие ту же точку, в точках K и T. Пересекаются ли прямые KB и TC на третьей окружности (рис. 42)?

142. Продолжения сторон четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и T (рис. 43). Около треугольников ABT, AMD, BCM, CDT описаны окружности. Докажите, что все они имеют общую точку.

143. Впишите в данную окружность трапецию, у которой основание содержит данную внутреннюю точку круга M, а боковые стороны соответственно параллельны двум данным прямым.

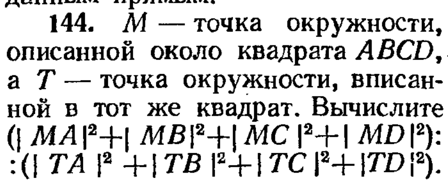


Рис. 44

144. M — точка окружности, описанной около квадрата $ABCD$, а T — точка окружности, вписанной в тот же квадрат. Вычислите $(|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2):(|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2+|TD|^2)$.

145. Четыре прямые проходят через центр окружности и делят ее на конгруэнтные части. Касательная к окружности пересекает эти прямые соответственно в точках A, B, C, D. Вторые касательные к окружности, проходящие через

названные точки, ограничивают четырехугольник $KLMN$, форму которого требуется установить (рис. 44).

146. Величины внутренних углов двух правильных многоугольников пропорциональны числам 1 и 2. Стороны многоугольников конгруэнтны. Во сколько раз площадь одного многоугольника больше площади другого?

147. Величины внутренних углов двух правильных многоугольников пропорциональны числам 5 и 9. Найдите отношение количеств диагоналей этих многоугольников.

148. Все углы выпуклого многоугольника конгруэнтны. Найдите внутреннюю точку, у которой сумма расстояний от сторон (или их продолжений) наименьшая.

149. Периметр квадрата P. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до прямой, содержащей центр квадрата.

150. В треугольник вписан квадрат так, что две вершины его принадлежат основанию треугольника, а две — боковым сторонам. Докажите, что длина стороны квадрата a и радиус вписанной в треугольник окружности r связаны соотношением: $r\sqrt{2}<a<2r$.

151. Величина острого угла ромба $ABCD$ равна 45°. Выполнен поворот ромба на 90° вокруг центра ромба. Является ли пересечение ромба и его образа правильным восьмиугольником?

152. На сторонах квадрата $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABH, BCK, CDM и DAT. Докажите, что середины отрезков AH, BH, HK, BK, CK, KM, CM, DM, MT, DT, AT, TH являются вершинами правильного двенадцатиугольника.

153. Через середины каждых двух смежных сторон квадрата проведены прямые. Являются ли точки пересечения этих прямых с описанной окружностью и вершины квадрата вершинами правильного двенадцатиугольника?

154. Докажите, что длина стороны правильного девятиугольника равна разности длин наибольшей и наименьшей диагоналей.

155. Как из равносторонних треугольников с площадями 9, 4, 3 сложить равносторонний треугольник, выполнив при этом наименьшее число разрезов?

156. Выполнив наименьшее число разрезов, сложите правильный шестиугольник из конгруэнтных правильных шестиугольников: а) трех; б) четырех.

157. Дана окружность и ее центр. Как разделить ее на 12 конгруэнтных частей, пользуясь только циркулем?

158. Как вырезать из правильного шестиугольника наибольший возможный равносторонний треугольник?

159. Длина стороны правильного шестиугольника a. Прямая, проходящая через вершину шестиугольника, делит его на части, площади которых пропорциональны числам 3 и 1. Найдите длину отрезка прямой, ограниченного сторонами шестиугольника.

160. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Сравните площади треугольников ACE и BDF.

161. В окружность вписан выпуклый шестиугольник, все углы которого конгруэнтны. Является ли он правильным?

162. Внутри прямоугольного треугольника ABC, у которого $|AB| = |AC|$, взята такая точка M, что $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15^\circ$. Найдите $\widehat{BMC}$.

163. Внутри квадрата $ABCD$ имеется такая точка M, что $|MA| = 7$, $|MB| = 13$, $|MC| = 17$. Определите площадь квадрата.

164. $[AB]$ — диаметр полуокружности, $[CD]$ — хорда, не параллельная диаметру AB. Найдите на полуокружности такую точку M, чтобы хорды MA и MB ограничивали на хорде CD отрезок данной длины.

165. $[AB]$ — диаметр полуокружности, на ней отмечены такие точки C и D, что $|AC| = 7$ см, $|CD| = |DB| = 15$ см. Найдите радиус полуокружности.

166. Из вершины треугольника ABC проведены высота, биссектриса и медиана. Их продолжения пересекают описанную окружность в точках D, E, F. Как по этим точкам построить треугольник ABC?

167. Периметр разностороннего остроугольного треугольника равен 20. Длины его сторон являются цифрами простого числа. Найдите площадь треугольника.

168. Если a — длина наибольшей стороны тупоугольного треугольника, то $a > P(\sqrt{2} - 1)$, где P — периметр данного треугольника. Докажите.

169. Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что $|MA| - |MB| = a$, $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Найдите расстояние от точки M до центра квадрата.

170. Внутри равностороннего треугольника ABC взята такая точка M, что $|MA| - |MB| = a$, $\widehat{AMB} = 120^\circ$. Найдите расстояние от M до центра треугольника ABC.

171. В окружность вписан выпуклый семиугольник, у которого три угла имеют величины по 120°. Имеет ли этот семиугольник конгруэнтные стороны?

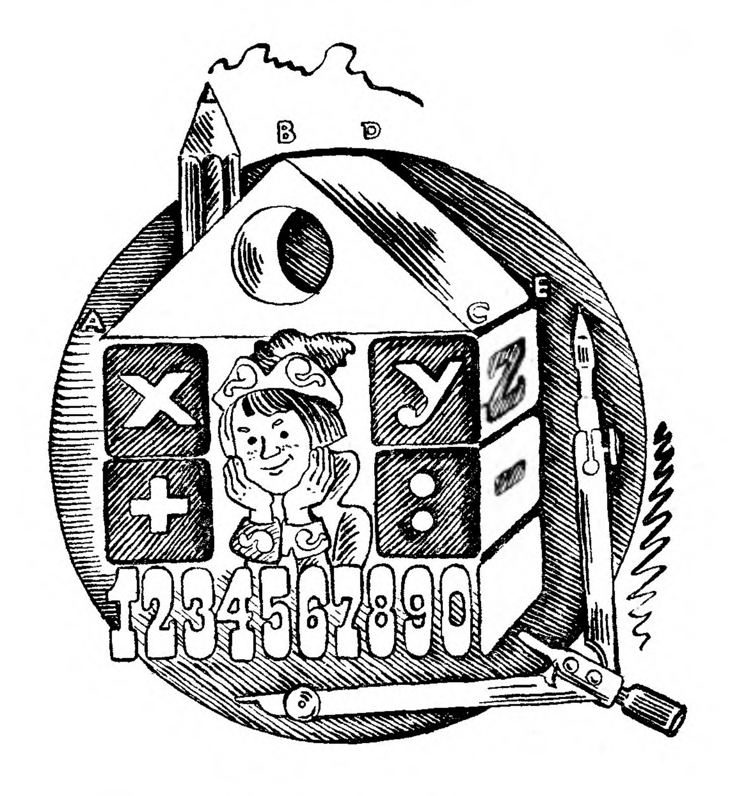
172. Как построить треугольник по точкам, симметричным центру описанной окружности относительно всех сторон треугольника?

173. Центр вписанной в прямоугольный треугольник окружности удален от концов гипотенузы на 1 см и $3\sqrt{2}$ см. Найдите длину этой окружности.

174. Верно ли, что из двух правильных многоугольников, вписанных в одну окружность, больший периметр у того, который имеет больше вершин?

175. В окружность вписаны два правильных многоугольника. Докажите, что величина отношения их площадей менее $\frac{5}{2}$.

ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ



Кто
перед чем сник?
Мысли удар дай!
Врежься
в толщь книг,
Нам
нет тайн!

В. Маяковский

Единица и Нуль

Больше чем пять квадратов составить нельзя, так как квадраты натуральных чисел не кончаются цифрами 2, 3, 7 и 8.

Чтобы установить признак делимости на 11, нужно иметь в виду, что $10^n - 1 = 99...9$ (в числе n девяток). Число 100...01, в записи которого четное число нулей, делится на 11.

Для написания числа 1976 наименьшим количеством одинаковых цифр потребуется: восьмерок 7 (например: $8((8 + 8)(8 + 8) - 8) - 8$; шестерок 9 (например: $66(6 \cdot 6 - 6) - 6 + (6 + 6) : 6$); девяток 9 (например: $(999 - 99 : 9)(9 + 9) : 9$); семерок 10 (например: $(77 - 7 : 7)(7 + 7 + (7 + 77) : 7)$; единиц 11 (например: $(1 + 1)(1111 - 111 - 11 - 1)$.

Из приключений Пети Верхоглядова

Приемы, предлагавшиеся Петей, верны только при некоторых соотношениях между указанными числами. В частности, $\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}$ при условии $c = 5$ или $|a - b| = 5$; $\sqrt{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$ при условии $c = ab - \frac{b}{a}$; $\sqrt[3]{a + \frac{b}{c}} = a\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ при условии $c = a^2b - \frac{b}{a}$.

В задаче об овцах на единице площади запас равен 24 суточным порциям травы, суточный прирост — 2 порции. Поэтому на третьем лугу могут пастись 4 дня 24 овцы.

Визитеры

Карточки, которые Петя не успел решить, имеют следующие ответы:

ИЛЬЯ ИЛЬИЧ КАЛКОВ: 9642 + 96 495 = 106 137 или 9645 + + 96 492 = 106 137.

БОРИС ФОМИЧ БАРСОВ: 17 436 + 87 239 = 104 675 или 12 563 + + 92 764 = 105 327.

ДЕНИС ИЛЬИЧ ДЕСТИН: 10 486 + 95 768 = 10 6294.

ЛУКА ИЛЬИЧ ЧУКЛОВ: 8062 + 98 791 = 106 853 или 8063 + + 98791 = 106 854.

ІВАН ІЛЛІЧ БУЧИЛО: 9263 + 95 594 = 104 857.

СЕМЕН ІЛЛІЧ КЕНЛЮК: 53 934 + 80 087 = 134 021.

ГНАТ ІЛЛІЧ ТРАШИН: 8461 + 97 793 = 106 254.

АННА МАРИЯ ПЕРМАХ: 8338 + 98 647 = 106 985.

ЕЛЕНА ЛЬВОВНА ВАНТОВА: 57 540 + 7 983 840 = 8 041 380.

ANNA LUISA NEIRUT: 6116 + 87 356 = 103 472.

ANNA LUISA SUSSEN (9): $2442_9 + 87\,612_9 = 106\,324_9$.

ПИМЕН НИЛЫЧ МИЛНЕВ (9): $62\,175_9 + 52\,403_9 = 124\,578_9$ или $52\,176_9 + 62\,483_9 = 124\,670_9$.

Выбор наследника

Деду в 1945 г. было 72 года ($1945 = 12^3 + 6^3 + 1^3$; $12 \cdot 6 \cdot 1 = 72$), а внуку в 1936 г. было 15 лет ($1936 = (2 \cdot 2 \cdot 11)^2$, $2 + 2 + 11 = 15$). Внук моложе деда на 48 лет.

Сказка о трех братьях и волшебных пирогах

Как резал пироги Иван-молодец, показано на рисунке 45.

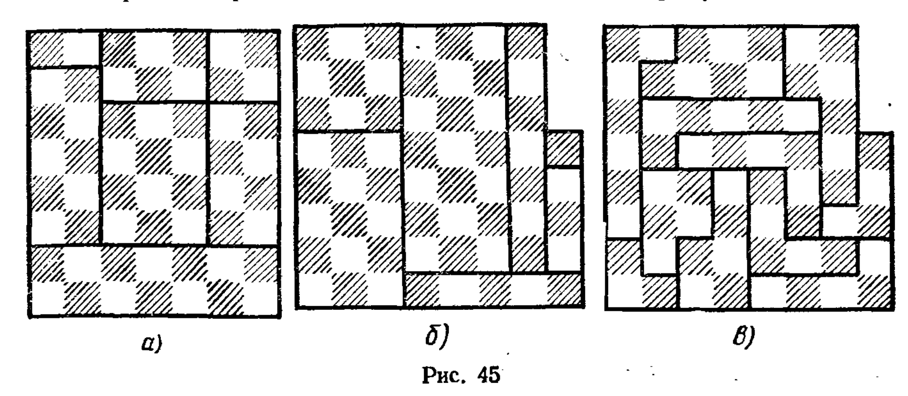


Рис. 45

Принцесса-шахматистка

Возможный путь юноши по шахматному полю показан на рисунке 46. Как юноша делил торты, показано на рисунке 47.

Спор у шахматной доски

Тем, кто захочет лучше разобраться в споре, полезно познакомиться с некоторыми понятиями теории вероятностей. Это удобно сделать по книгам Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчина «Элементарное введение в теорию вероятностей», или Б. А. Кордемского «Математика изучает случайности», или В. С. Лютикаса «Школьнику о теории вероятностей».

Серый джинн — похититель яблок

Об обходе шахматной доски конем можно прочесть в книгах Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске», Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки», Е. Я. Гика «Математика на шахматной доске».

В задаче о четырех башнях (O—центр окружности, вписанной в треугольник ABC) кратчайший маршрут—$ABOCA$, где $[BC]$—наибольшая сторона.

8	26	11	34	59	64	15	32	57
7	35	60	27	14	33	58	63	16
6	10	25	12	45	62	43	56	31
5	47	36	61	28	13	30	17	6
4	24	9	46	51	44	7	42	55
3	37	48	23	8	29	52	5	18
2	22	1	50	39	20	3	54	41
1	49	38	21	2	53	40	19	4
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 46

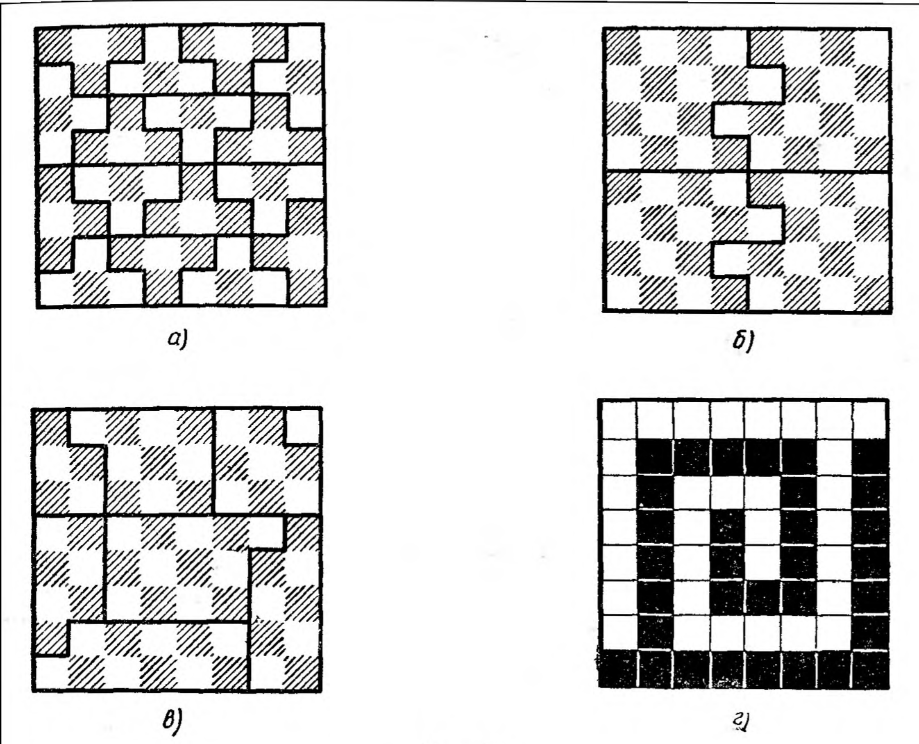


Рис. 47

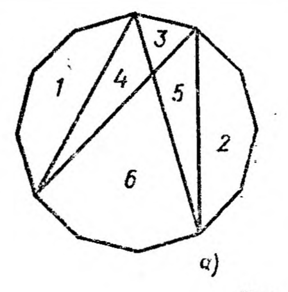
Чтобы найти положение центра тяжести ворот, Баной мысленно разбил их на пять прямоугольников. Представив себе, что в центре каждого из них сосредоточена масса, пропорциональная площади прямоугольника, он умножил площади на расстояния от центров прямоугольников до основания ворот. Сумма этих произведений равна произведению площади ворот на расстояние от центра тяжести до основания. $M = 27 \cdot 1,5 + 1 \cdot 3,5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 63,5$; $x = 63,5 : 33$, т. е. $x = \frac{127}{198} H \approx 0,641 H \approx \frac{16}{25} H$.

В задаче о взвешивании 26 кубов следовало класть на чашки весов по девять кубов. Найдя девятку (или восьмерку) кубов, среди которых находится более тяжелый, следовало класть на чашки весов по три куба (из этой группы) и т. д.

Путешествие молодого математика

Аналогично рассуждению Рониса, можно показать, что если все углы треугольника меньше 120°, то наименьшую сумму расстояний от вершин имеет точка, из которой все стороны видны под углами в 120°. Эта точка находится внутри треугольника (точка Торричелли).

Задача о складывании квадрата из минимального числа частей правильного двенадцатиугольника имеет еще одно решение, показанное на рисунке 48.



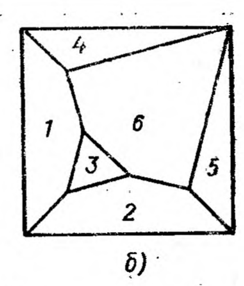


Рис. 48

Солдат-математик

О складывании квадрата из неконгруэнтных квадратов говорится в книге Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева «Удивительный квадрат».

НЕ СОВСЕМ ОБЫЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Математические ребусы

1. Д = 1, А равно 2 или 3, но А — четная цифра; следовательно, А = 2, Р = 6, У = 8, К = 5. **2.** А = 1, Ш = 9, В = 0. Если Р < 6, то это четная цифра, при Р > 5 — нечетная. Испытания Р дают: 3625 + 97623 = 101248. **3.** Г = 1, К = 9, О = 0, А = 8, Р = 5, У = 4, С = 3, Д = 7. **4.** Испытывают возможные значения Е. Ответ: 48575 + 75075 = 123650 или 90474 + 74874 = 165348. **5.** И = 1, поэтому Л равно 0 или 5. При Л = 0 имеем: А = 5 и Е — нечетная цифра, что невозможно (6 + 6 = Е). При Л = 5 А = 2, Ь = 9, Е = 8, Т = 4, Д = 6, З = 3. **6.** 2497 · 3 = 7491. **7.** 94183 · 3 = 282549. **8.** $\overline{РО}$ равно 50 или 49. Первое невозможно, так как А равно 0 или 5. Поэтому Т = 6, Д = 1, П = 7, А = 5, Г = 2. **9.** 6487 · 3 = 19461. **10.** $\overline{ЕТ}$ равно 50 или 49. Первое не годится, так как А равно 0 или 5. 834970 · 3 = 2504910. **11.** 4521 · 3 = 13563 или 8972 · 3 = 26916. **12.** По числу цифр в слагаемых и сумме, $\overline{EN}$ = 50, S — F = 1, I = 1, O = 9, T + T + R + 1 ⩾ 22. Испытания значений T приводят к ответу: 850 + 850 + 29 786 = 31 486. **13.** 93 989 + 7492 + 7492 = 108973. **14.** 94725 + 94 725 + 856 155 = 1 045 605. **15.** 4172 · 4 = 16688 или 5286 · 4 = 21144. **16.** 549 · 5 = 2745. **17.** 179 · 6 = 1074. **18.** 13606 · 7 = 95242. **19.** 130772 · 6 = 784632. **20.** 5456 + 8356 + 90456 = 104268. **21.** 302968 + 304578 = 607546. **22.** 532867 + 93867 = 626734 или 643071 + 94071 = 737142. **23.** 80750 + 372965 = 453715 или 70850 + 382965 = 453815. При решении учитывается, что А = 0, Д = 9, О — К = К — Е = 1. **24.** M = 1, O = 0, S = 9, N — E = 1, R = 9, D + E > 11. 9567 + 1085 = 10652. **25.** Б = 1, У = 9, Е = 0, поэтому М — В = 1, Д + Л = 9. 1949 + 6950 + 96 783 = 105 682. **26.** 83 601 + 93 204 = 176805 или 68701 + 58903 = 127604. **27.** 5981 + 96582 = 102563 или 7981 + 96784 = 104765. **28.** 8304 + 795124 = 803428. **29.** 97920 + 7843420 = 7941340. **30.** Г = 9, Е = 0, поэтому И = 8, Д = 7,

В = 2, Ч = 1. 657854 + 89560281 = 90218135. **31.** 951075 + 73194= = 1014269. **32.** 7651 + 96258 = 103909. **33.** 51298 + 72403 = 123701 или 51298 + 72463 = 123769. **34.** 829723 + 85482 = 915205. **35.** 549728 + 918570 = 1468298 или 549723 + 913570 = 1463290. **36.** 23 · 34. **37.** 79 · 36. **38.** 37 · 78. **39.** 117 · 898. **40.** 120 · 589. **41.** 337 · 931. **42.** 327 · 413. **43.** 979 · 191 или 323 · 393. **44.** 113·679. **45.** 484 · 182. **46.** 412 · 241. **47.** 1253 · 6079. **48.** 1373 · 7109. **49.** 1768 · 3602. **50.** 1209 · 9849. **51.** 2865 · 1732. **52.** 3773 · 1321. **53.** 3424 · 1241. **54.** 505 · 1151. **55.** 6222 · 11201. **56.** 254 · 452. **57.** 213 · 342. **58.** 351 · 321. **59.** 102 · 201. **60.** 107 · 743 = 79501. **61.** 160 · 0,35 = 56. **62.** 80 · 86. **63.** 60 · 48 или 80 · 86. **64.** 157 · 61. **65.** 407 · 271. **66.** 357 · 208. **67.** 35 · 42. **68.** 256 · 328. **69.** 48384 : 126 = 384. **70.** 113620 : 115 = 988. **71.** 1378252 : 142 = 9706. **72.** 1045235 : 115 = 9089. **73.** 3125 : 125 = 25. **74.** Делимое — 1029, делители — 5 и 9. **75.** 4182 : 25 и 2814 : 52. **76.** ЗАПОВЕДНИК. **77.** РЕСПУБЛИКА. **78.** ПОДСТАНЦИЯ. **79.** 952576 = 976. **80.** 60516 = 246. **81.** 390625 = 625. **82.** 180625 = 425. **83.** 2^{10} = 1024. **84.** 2^{12} = 4096. **85.** 3^{10} = 59049. **86.** По первой строке $\overline{АБ} < 32$. По первому столбцу $\overline{АБ}$ — квадрат, т. е. 16 или 25. Но 25^2 кончается на 25, чего нет. Значит, $\overline{АБ}$ = 16, С = 4, В = 2 и т. д. **87.** По третьему столбцу А = 1, поэтому К = 2 или 3, Ж = 0. По первому столбцу Д не больше 7, т. е. Д = 6, поэтому К = 2, Е = 8, З = 3. **88.** По первой строке $\overline{АБ}$ = 21, К = 5. **89.** По третьему столбцу П = 1, по второму Л = 0, поэтому С = 9. Так как И · Т и И · О кончаются одной цифрой К, то И — четная цифра, а разность между Т и О равна 5, т. е. это цифры 2 и 7 или 3 и 8. Испытание дает: О = 2, Т = 7, И = 8. **90.** По второй строке $\overline{ТУ}$ = 37 или 74. Если $\overline{ТУ}$ = 74, то $\overline{ПИ}$ = 12 и в первой строке Т = 4 или 9, а не 7. $\overline{ТУ}$ = 37, поэтому К = 9, А = 6, $\overline{ПИ}$ = 18, О = 5. **91.** По второй строке Е > 5, тогда по третьему столбцу В = 1. Поэтому вторая строка либо 105 : 15 = = 7, либо 108 : 18 = 6. В первом случае Б = Г, чего быть не может. Поэтому вторая строка означает 108 : 18 = 6. Значит, К = 3, А = 4. **92.** По первой строке У = 1, по второму столбцу Р — К = 1. По первому столбцу Р + С ⩾ 12; значит, Р = 5 или 6. Испытание дает: 976 : 61 = 16; 19 · 51 = 969; 995 — 10 = 985. **93.** По первому столбцу К = 1, И = 0; следовательно, третья строка 1001 : 13 = 77. По третьему столбцу $\overline{МО}$ = 56 · 15 = 840. **94.** По третьей строке □ = 1. По второй строке О — четная цифра, которой кончается квадрат ■, поэтому О = 6, ■ = 4 и ● = 8. Следовательно, ▲ = 2. **95.** По второму столбцу видно, что ◧ = 1, причем ◪ + ■ = 10 или 11.

По первой строке ◪ = 4 или 6. Проверив возможные значения

◪ и ■, убеждаемся, что ■ = 4 и ◪ = 6. Значит, ⬒ = 2,

◩ = 3, ◪ = 5, ⬓ = 0 и т. д.

96.

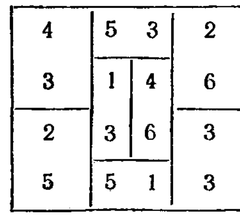
$$\begin{array}{r} 11 \times 10 = 110 \\ 68 : 17 = 4 \\ 10 + 10 = 20 \\ 12 - 4 = 8 \\ \hline 101 + 41 = 142 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 11 \times 15 = 165 \\ 67 : 67 = 1 \\ 10 + 10 = 20 \\ 12 - 3 = 9 \\ \hline 100 + 95 = 195 \end{array}$$

97.

$$\begin{array}{r} 11 \times 17 = 187 \\ 135 : 15 = 9 \\ 18 - 9 = 9 \\ 1 + 10 = 11 \\ \hline 165 + 51 = 216 \end{array}$$

Упражнения с цифрами

1. Их не больше пяти: 1, 9, 25, 36, 784. **2.** Их не больше шести (например, 2, 3, 5, 47, 61, 89). **3.** 18654 и 9327; 18546 и 9273; 18534 и 9267; 15864 и 7932; 15846 и 7923; 14658 и 7329; 14586 и 7293; 13854 и 6927; 13584 и 6792; 13458 и 6729. **4.** 17496 и 5832; 17469 и 5823. **5.** 192, 384, 576; 219, 438, 657; 273, 546, 819; 327, 654, 981. **6.** 9, 18, 27, 36, 45. **7.** Их цифры десятков: 6, 5, 4. Пусть цифры единиц: x, y, z. Тогда имеем: $(60 + x)(50 + y)(40 + z) = 60 \cdot 50 \cdot 40 + 60 \cdot 50 \cdot z + 60 \times 40 \cdot y + 50 \cdot 40 \cdot x + 60yz + 50xz + 40xy + xyz$. Теперь видно, что наибольшая величина при $x < y < z$, т. е. самое большое произведение 61 · 52 · 43 = 136396. **8.** а) 941 · 852 · 763; б) 147 · 258 · 369. **9.** Решений много. Приведем примеры: 80 = 1 + (23 — 4) · 5 — 6 + + 7 — 8 — 9 = 1 + 2 · 3 — 4 + 5 · 6 + 7 · 8 — 9 = 123 — 45 — —6 + 7 — 8 + 9 = (1 + 2 · 3 · 4) : 5 + 6 + 78 — 9; 100 = 1 + 2 × × 3 — 4 — 5 + 6 + 7 + 89 = 123 — 45 — 67 + 89 = 1 — 2 — 3 + + (4 + 5 + 6) · 7 + 8 — 9; 1965 = 1 + 2 · 3 + (4 + 5 + 6 + 7) × × 89 = (—1 + 2) · 3 + 45 · 6 · 7 + 8 · 9. **10.** Например, 1^3 = 1 — — 2 — 3 + 4 + 5 + 6 + 7 — 8 — 9; 2^3 = 1 · 2 + 3 — 4 + 5 — 6 + + 7 — 8 + 9; 3^3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 — 9; 4^3 = = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 · 6 + 7 + 8 + 9; 5^3 = 123 + 45 — 6 · 7 + + 8 — 9; 6^3 = (1 + 23) (4 + 5) — 6 + 7 + 8 — 9; 7^3 = (—1 + 2 — — 3 + 45 + 6) · 7 · (—8 + 9); 8^3 = 123 · 4 + 5 · 6 + 7 — 8 — 9; 9^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 56 + 7 + 8) · 9; 10^3 = 1 — 2 — 3 — 4 + + (56 + 7 · 8) · 9. **11.** Например, 50 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 · 4 + + 3 — 2 — 1; 100 = 9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 · 2 + 1; 125 = 98 + + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 · 1; 1977 = (987 + 6 — 5 + 4 — 3) × × 2 — 1. **14.** 111; 2^{22}; 3^{33}; 4^{4^4}; 5^{5^5}; 6^{6^6}; 7^{7^7}; 8^{8^8}; 9^{9^9}. **16.** 987 654 213. **17.** 987652413; 123475869. **19.** 792329. **20.** 9974475359616771. **21.** 9999989606162... **22.** Числа по горизонтали: 841 и 196. **23.** 9750312 или 9753120. **24.** 25; 7225; 27225; 55225; 235225. **25.** 2468041. **26.** Пример показан на таблицах.



4	5	3	2
3	1	4	6
2	3	6	3
5	5	1	3

5 6	0 2	5 1	2 6	6 6	3 0
0 6	6 4	4 3	3 3	2 2	6 3
3 1	5 4	4 4	1 6	3 2	5 4

27. Эта сумма находится между 774 и 2556. Так как она кратна 9 то равна 30^2, 33^2, 36^2, 39^2, 42^2, 45^2 или 48^2. **28.** 3481 = 59^2 и 205379 = 59^3.

Почтовый штемпель

1. Да, 18 чисел: 1 · 3 · 31; 1 · 7 · 28; 2 · 1 · 97; 2 · 7 · 44; 3 · 3 × × 75; 4 · 9 · 13; 5 · 8 · 32; 6 · 8 · 59; 9 · 2 · 61; 10 · 6 · 48; 12 · 1 × × 67; 13 · 8 · 24; 15 · 6 · 25; 17 · 5 · 76; 19 · 6 · 83; 21 · 9 · 52; 24 · 3 · 89; 29 · 7 · 91. **2.** Можно. Условию отвечают записи: 1 · 10 = = 10; 1 · 11 = 11; 1 · 12 = 12; 2 · 5 = 10; 2 · 6 = 12; 2 · 7 = 14; 2 · 8 = 16; 2 · 9 = 18; 2 · 10 = 20; 2 · 11 = 22; 2 · 12 = 24; 3 · 4 = = 12 и т. д., кончая 29 · 1 = 29; 29 · 3 = 87; 30 · 1 = 30; 30 · 3 = = 90; 31 · 1 = 31; 31 · 3 = 93, и со знаком равенства после первого числа: 31 = 1 · 31; 30 = 1 · 30; 30 = 2 · 15; 30 = 3 · 10; 29 = 1 × × 29; 28 = 1 · 28; 28 = 2 · 14 и т. д., кончая 10 = 1 · 10. **3.** Записи, аналогичные записям в решении предыдущей задачи: 31 : 1 = 31; 30 : 2 = 15; 30 : 1 = 30; 30 : 3 = 10 и т. д. **4.** 13 раз: 1 · 1 · 11; 11 · 1 · 11; 1 · 11 · 11; 11 · 11 · 11; 2 · 2 · 22; 22 · 2 · 22; 3 · 3 · 33; 4 · 4 · 44; 5 · 5 · 55; 6 · 6 · 66; 7 · 7 · 77; 8 · 8 · 88; 9 · 9 · 99. **5.** 11^2 — 191 раз; 10^2 — 368 раз; 9^2 — 376 раз; 8^2 — 376 раз; 7^2 — 351 раз; 6^2 — 233 раза; 5^2 — 101 раз; 4^2 — 15 раз. **6.** 136 раз: цифры образуют квадраты чисел от 34 до 177 включительно, кроме 55, 71, 84, 95, 100, 138, 155 и 174. При этом квадрат числа 106 встречается дважды: 1 · 12 · 36 и 11 · 2 · 36. **7.** Квадратом 925 раз, кубом 180 раз.

Поездки в такси

1. 10, 20, 30 к. У к а з а н и е. При включении зажигания на счетчике появляется число 20. Если проезд от А до Б стоит x к., то дело сводится к решению уравнения: $\left(\frac{20 + x}{3} + \frac{20 + 2x}{2}\right) \cdot 2 = 20 + 4x$. **2.** 2 р. **3.** 10, 20, 40, 30 к. **4.** 2 р. 20 к.

Задачи на раскраску

1. Да. Если все одного цвета, то такие треугольники имеются. Пусть A белая, а B, C, D, E — черные. Тогда условию отвечают треугольники ABC и ADE. Если белые A и B, то условию отвечают треугольники ABC и ABE. Если белые A и C, то условию отвечают треугольники ABE и BCD. **2.** Да. **3.** Остались 62 клетки. Следовательно, каждый прямоугольник содержит 2 клетки — черную и белую. Но на данной доске черных и белых клеток не поровну. Следовательно, требуемое разрезывание неосуществимо. **4.** Нет. При каждом ходе коня он попадает с белого поля на черное или наоборот. За 63 хода он должен попасть на поле, цвет которого не совпадает с цветом начального. Поля a1 и h8 одного цвета, поэтому такой обход невозможен. **5.** Рассуждение, как в задаче 4. **6.** При раскраске окажется, что в пяти фигурах черных и белых клеток по 3, а в одной — по 4 и 2. Поэтому, сложив их, мы не получим равных количеств черных и белых клеток. Следовательно, прямоугольник сложить нельзя.

С алгеброй и без нее

1. Расстояние между городами вдвое больше расстояния от столба 146-го километра до B. Город B на 146 — (190 — 146) : 2 = 124-м километре. **2.** Между столбами 110 — 46 = 64 км. От A до столба 46-го километра и от столба 110-го километра до D вместе 64 — 28 = = 36 км. От A до D 64 + 36 = 100 км. **3.** Книга стоила не менее 10 × × 2 = 20 к., а альбом не более 15 · 3 = 45 к. Поэтому книга стоила 20 к., а альбом 40 к. Остались 7 монет на сумму 80 к., 5 по 10 к. и 2 по 15 к. Вначале было 8 монет по 10 к. и 4 по 15 к. **4.** Могли быть цифры 0 и 6, или 1 и 5, или 2 и 4. Каждый раз таких столбов могло оказаться 8 (например, 111 — 555, 115 — 551, 151 — 515, 155 — 511, 511 — 155, 515 — 151, 551 — 115, 555 — 111). Всего таких столбов 24 и еще 4 столба с цифрами 6 и 3. **5.** Синих — четное число, меньшее 4. Поэтому синих 2, красных 4, желтых и зеленых по 3. **6.** Если бы на стоянке были только автомобили, то колес было бы 60, поэтому на стоянке стояли 1 мотоцикл без коляски и 2 с колясками. **7.** Если лошадей было $x > 1$, а свиней y, то $4x + 3y = 25$. При этом условии в натуральных числах одно решение: $x = 4$, $y = 3$. **8.** Отцу меньше (87 + 3) : 2 = 45 лет, но больше 25 лет. Между этими числами только один точный квадрат — 36. Следовательно, отцу 36 лет, матери 33 года, сыновьям 6 и 12 лет. **9.** Пусть дочкам x, $x + 2$ и $x + 4$ лет, тогда матери $3x + 16$ лет, а отцу $2x + 16$ или $4x + 16$ лет. Но корень уравнения $3x + 6 + 3x + 16 + 2x + 16 = 88$ дробный. В другом случае $x = 5$, т. е. отцу 36 лет, а матери 31 год. **10.** 10112358. **11.** 900000. **12.** Два или четыре. **13.** 1) 110 + 71 = 181; 2) 181 · 11 = = 1991; 3) 1991 · 37 = 73667. **14.** На 9 страницах по одной цифре, на 90 страницах — по две. Оставшиеся 1791 цифра записаны на 1791 : 3 = 597 страницах. Всего страниц 696. **15.** От 1 до 9 записаны 9 цифр, от 10 до 99 — 180 цифр. Оставшиеся 1796 цифр пошли на запись чисел от 100 до 697 (598 · 3 = 1794) и на начало числа 698. На 1985-м месте — цифра 9. **16.** На 3 и 17 делится число 51. Если бы искомое число равнялось 51, остаток от деления (17 : 3) равнялся бы 2. По условию он равен 100, т. е. в 50 раз больше. Искомое число 51 · 50 = = 2550. **17.** Без остатка делятся числа 273420 и 272745, их разность 675. Искомое число больше 17 и является делителем 675. Заметив, что оба числа не делятся на 25, но делятся на 5, испытываем числа 135 и 45. Первое не годится. **18.** 47 и 4. **19.** 57 и 5. **20.** 529 и 59. **21.** 3375 и 335. **22.** 3689, 369, 368. **23.** Первая цифра числа равна 3, вторая нечетна, т. е. равна 1. Если цифра единиц x, то $328 - (310 + x) = = 3 + 1 + x$; $x = 7$. Искомое число 317. **24.** 2704 или 2695. **25.** 62 и 2688; 62 + 2688 = 2750; 26 + 8862 = 8888. **26.** 23 и 154. **27.** 462 и 1114. **28.** 380547362. **29.** 4020 = 10 · 402 = 12 · 335 = 15 · 268 = = 20 · 201 = 30 · 134. Из этих вариантов годится только третий. Искомое число 15268 (152 · 68 = 10336). **30.** 2235 — 223 — 22 — 2 = = 1988. **31.** Число $\overline{АБАБАБ} = \overline{АБ} \cdot 10101 = \overline{АБ} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Искомые числа: 35, 36, 37, 38, 39, т. е. $\overline{АБ} = 57$. **32.** $\overline{БАБАБА} = = \overline{БА} \cdot 10101 = \overline{БА} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = \overline{БА} \cdot 7 \cdot 37 \cdot 39$, поэтому $(\overline{БА} \cdot 7) : 5 = 35$ или 41. Так как 41 не делится на 7, то $\overline{БА} = 25$.

33. Условию отвечают все дни января; кроме того, в високосном году — 30 марта, а в обычном году — 30 апреля и 30 мая. **34.** Вторники были 2-го, 16-го и 30-го числа. Последняя пятница была 26-го. **35.** Пусть 1 января имело номер дня недели x, тогда номера первых чисел всех месяцев будут следующими:

Год	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Обыкновенный	x	$x+3$	$x+3$	$x+6$	$x+1$	$x+4$	$x+6$	$x+2$	$x+5$	x	$x+3$	$x+5$
Високосный	x	$x+3$	$x+4$	x	$x+2$	$x+5$	x	$x+3$	$x+6$	$x+1$	$x+4$	$x+6$

Из таблицы видно, что хоть одно первое число окажется воскресеньем. **36.** Используем таблицу предыдущей задачи, считая x номером дня недели 13/1. По таблице видно, что по 13-м числам могут оказаться три пятницы (в обычном году — в феврале, марте, ноябре, в високосном — в феврале, в августе и в октябре). **37.** Наименьшее такое число 179487. В первом триллионе есть еще одно число: 179487179487. **38.** Утроенное число начинается цифрой 7, поэтому первая цифра числа будет 2. Далее вычисляем: $72 : 3 = 24$ (вторая цифра 2), $724 : 3 = 241$ и т. д. Искомое число 2413793103448275862068965517. **39.** $1944 = 24 \cdot 81 = 27 \cdot 72 = 36 \cdot 54$. Так как $65 \cdot 43 = 2795$, написаны цифры 6, 5, 4, 3. **40.** Пловец удалялся от фляги или догонял ее с одной и той же скоростью относительно фляги, поэтому он догонял флягу 3 мин. Скорость течения 1,5 км/ч. **41.** За секунду окунь проплывает либо 0,1, либо 0,08 пути от моста до коряги. Разность — 0,02 пути — вызвана наличием течения. Карась проплывал за секунду 0,08 пути по течению, а против течения $0{,}08 - 0{,}02 = 0{,}06$ пути. Он затратит на весь путь $1 : 0{,}06 \approx 16{,}7$ с. **42.** Если второй еж пробегает 1 м за x секунд, то первая черепаха отбросила его назад на $6x$ см, а вторая подвезла на $8x$ см. Значит, черепахи помогли ему. Лучшим бегуном был первый еж. **43.** До первой встречи они вместе проехали расстояние от A до B, а к моменту второй встречи — втрое больше. До второй встречи первый проехал 70 км $\cdot\, 3 = 210$ км. Расстояние от A до B $(210 + 40) : 2 = 125$ км. **44.** Когда второй сел в трамвай, первому оставалось пройти треть пути. Значит, скорость трамвая втрое больше скорости пешехода. **45.** Относительная скорость катера 15 км/ч. Так как он проплыл 30 км за такое время, за какое плот проплыл $10 : 2 = 5$ км, то скорость течения в 6 раз меньше скорости катера по течению. Если скорость течения x км/ч, то $6x - x = 15$, т. е. $x = 3$. Катер плыл до B $30 : (15 + 3) = 1\frac{2}{3}$ ч, прибыл в 13 ч 40 мин. **46.** При движении в оба конца каждый участок будет и спуском и подъемом. На километр пути в оба конца уйдет $3 + 2 = 5$ мин. Поэтому от A до B (3 ч + 3 ч 20 мин) : 5 мин = 76 км. **47.** На километр горизонтального участка и на километр наклонного участка в оба конца уходит 8 мин. Расстояние равно 1 ч : 8 мин = 7,5 км. **48.** Сравним дроби с $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{3} - \frac{222222221}{333333332} = \frac{1}{999999996}$; $\frac{2}{3} - \frac{444444443}{666666665} = \frac{1}{1999999995}$. Первая

разность больше второй. Поэтому бóльшая дробь — вторая. **49.** Сравним дроби с 1: $1 - \frac{2222221}{2222223} = \frac{2}{2222223} = \frac{6}{6666669}$; $1 - \frac{3333331}{3333334} = \frac{3}{3333334} = \frac{6}{6666668}$. Первая дробь больше. **50.** Первый ехал 3 ч, второй $3\frac{3}{4}$ ч, т. е. первый в час проезжал $\frac{1}{3}$, а второй $\frac{4}{15}$ пути. В час они сближались на $\frac{3}{5}$ пути, поэтому ехали до встречи $\frac{5}{3}$ ч. Встреча произошла в 11 ч 40 мин. **51.** В группе было более 4 чел., но менее 6 чел., т. е. 5 чел. Так как $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, то размер премии $45 : \frac{1}{20} = 900$ р. **52.** За годы учебы сын мог получить книг 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 и т. д. Но 25 можно представить как сумму трех чисел из числа названных единственным образом: $1 + 3 + 21$. Сыновья окончили 6 классов, 2 класса, 1 класс. **53.** Одному из внуков было 6 или 5 лет. Во втором случае общая сумма возрастов была бы нечетной. В первом случае $(60 + x) + 6 + x = 72$, $x = 3$. Бабушке было 63 года. **54.** Число лет отца кратно 6 (48, 42, 36, 30). Легко отвергаются все варианты, кроме одного: отцу 36 лет. **55.** 30, 10 и 1. **56.** $(19 + 21 + 12) - (6 + 7 + 3) = 36$, а не 38. Расхождение вызвано тем, что трижды вычли число учащихся, занимающихся тремя видами спорта. Их $38 - 36 = 2$ чел. Если воспользоваться кругами Эйлера (рис. 49), то придем к уравнению: $(6 + x) + (11 + x) + (3 + x) + (6 - x) + (7 - x) + (3 - x) + x = 38$; $36 + x = 38$; $x = 2$. **57.** Последняя цифра такого числа будет 9. Если предыдущая цифра менее 9, то после прибавления 1 нечетность суммы цифр сохраняется для чисел $x09$, $x29$, $x49$, $x69$, $x89$ при четном x и для $x19$, $x39$, $x59$, $x79$ при нечетном x и для числа 999. Всего таких чисел 46. **58.** Число делится на $7 \cdot 29 = 203$. Если оно равно $203x$, то $\frac{203x \cdot 19 - 3}{37} = 104x + \frac{3x - 1}{37} \cdot 3$. Наименьшее натуральное x, при котором эта дробь равна целому числу, 25. Искомое число 5075. Следующее $x = 62$ приводит не к четырехзначному числу, а к пятизначному. **59.** Учтем, что $468 = 4 \cdot 9 \cdot 13$. По делимости на 4 цифра y — нечетная. Цифра x определяется для каждого y по признаку делимости на 9. Полученные числа (853416, 853236, 853056, 853956, 853776, 853596) делим на 13. Условию отвечает только 853416. **60.** 479304. Учтите, что $504 = 8 \cdot 9 \cdot 7$. **61.** 6124536. Учтите, что $792 = 8 \cdot 9 \cdot 11$. **62.** Из

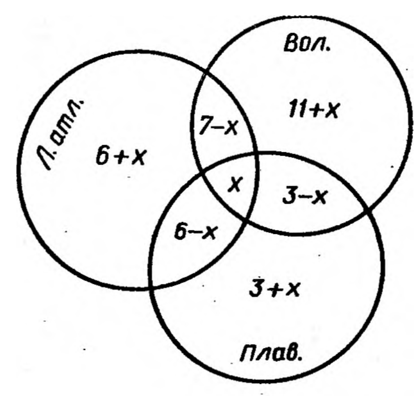


Рис. 49

чисел от 1 до 16 исключаем 11 и 13, так как при их сохранении равенство произведений невозможно. Произведение оставшихся чисел $2^{15}3^{6}5^{3}7^{2}$, их сумма 112. Исключаем два числа с четной суммой и произведением $2^{a}3^{b}5^{c}7^{d}$, где a и c — нечетные числа, а b и d — четные (4 и 10). Оставшиеся делим на две группы так, что на одной скамейке оказываются дети, которым 2, 3, 6, 7, 15 и 16 лет. **63.** Одно из них 2. Если второе $x > 5$, то либо $x + 2$, либо $x - 2$ делится на 3. Условию отвечает только второе число $x = 5$. **64.** 102000564. **65.** 1210; 21200; 3211000; 42101000; 521001000; 6210001000. **66.** Если двузначные числа x и y, то $2xy = 100x + y$, т. е. $y = \frac{100x}{2x-1} = 50 + \frac{50}{2x-1}$. Поэтому $2x - 1 = 25$, т. е. $x = 13$, $y = 52$. Число $xy = 676$ делится на трехзначные числа 169, 336, 676. Все цифры различны только у первого из них. **67.** По условию $\frac{ab}{c} = 96$, $\frac{ac}{b} = b$. Отсюда $a^2 = 96b$. Так как a и b — различные двузначные числа, то $a = 48$, $b = 24$, $c = 12$. **68.** По условию $100x + y$ делится на $\frac{x+y}{2}$, т. е. $99x$ или $198x$ делится на $x + y$. Таким образом, четное $x + y$ — делитель 198, т. е. $x + y = 22$ или 66. Первое невозможно. Остаются четырехзначные числа: 1353, 1947, 2343, 2937, 3729, 4323, 4719, 5313. **69.** В каждой сотне, где цифра сотен не 9, таких чисел 19. В первой тысяче таких чисел $100 + 9 \cdot 19 = 271$. **70.** Число имеет вид 2199...978. **71.** Каждый пятый множитель делится на 5, каждый двадцать пятый — на 5^2. Таким образом, произведение делится на 5^{24}, кончается 24 нулями. В каждом десятке множителей (1 — 10, 11 — 20, ..., 91 — 100) первая значащая цифра справа 8, поэтому искомая цифра есть последняя цифра $8^{10} = 64^5$, т. е. 4. **72.** $(10x + 1)(10x + 2)(10x + 3)(10x + 4) = 1000(10x^4 \pm 10x^3) + 500x(7x \pm 1) + 24$. Так как число $x(7x \pm 1)$ при целом x четное, то утверждение задачи верное. **73.** $(10x - 3)(10x - 1)(10x + 1)(10x + 3) = (100x^2 - 9)(100x^2 - 1) = 10000x^4 - 1000x^2 + 9$. Цифра десятков 0. **74.** $(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 5(x^2 + 2)$. Но $x^2 + 2$ при целом x не делится на 5, поэтому сумма не есть квадрат числа. **75.** 18, 36, 54, 72, 90. **76.** 129, 387, 645. **77.** Если скорость пешком x км/ч, а время движения мотоциклом y ч, то расстояние $15xy + 5{,}5x$ км, время движения $3y = 1{,}5$ ч. На обратный путь ушло $3y + 1{,}1$ ч, т. е. на 24 мин. меньше. **78.** 376 и 625. **79.** Пусть свинца в первом сплаве $a\%$, во втором $b\%$, отрезали по x кг сплава. По условию

$$\frac{(6-x)\frac{a}{100} + x \cdot \frac{b}{100}}{6} = \frac{(12-x) \cdot \frac{b}{100} + x \cdot \frac{a}{100}}{12}.$$ Отсюда $x = 4$ кг.

80. Пусть длина трубы a м, скорость мальчика x м/с, скорость трактора y м/с. Тогда $\frac{ax}{x-y} = 120 \cdot 0{,}75$; $\frac{ax}{x+y} = 30 \cdot 0{,}75$. Отсюда $\frac{2}{a} = \frac{1}{18}$, $a = 36$ м. **81.** Если цены топорика, спального мешка, рюкзака и палатки соответственно x, y, z, t рублей, то $x + y = 18$, $x + 2y + z = 40$, $y + z + t = 66$. Поэтому $3x + 4y + z + 2t = 4(x + y) + 2(y + z + t) - (x + 2y + z) = 4 \cdot 18 + 2 \cdot 66 - 40 = 164$ р. Можно было выражать все переменные через y, а затем искать $3x + 4y + z + 2t$. **82.** Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. Сложив данные суммы, получим: $4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 96$, т. е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 24$. Так как $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 + x_3 = 5$, $x_4 + x_5 = 17$, $x_3 + x_5 = 13$, то $x_3 = 24 - 3 - 17 = 4$, $x_1 = 5 - 4 = 1$, $x_2 = 2$, $x_5 = 9$, $x_4 = 8$. **83.** Сумма номеров домов на одной стороне квартала равна произведению среднего номера на число домов. Так как домов не менее 7, то имеется одна возможность: средний номер 19, домов 13. Седьмой номер от угла—средний. **84.** $186 = 186 \times 1 = 93 \cdot 2 = 62 \cdot 3 = 31 \cdot 6$. Поскольку один из домов квартала имеет номер 28, имеет место только последний вариант: $186 = 36 + 34 + 32 + 30 + 28 + 26$. Следующий квартал начинается номером 38. **85.** Количество трамваев пропорционально относительным скоростям. Если скорость трамвая x км/ч, то $(x + 4{,}5) : (x - 4{,}5) = 66 : 30$, откуда $x = 12$ км/ч. **86.** Отрицательных чисел и нулей не более 4. Выделив три положительных числа, распределим все остальные по пятеркам. Общая сумма положительна. **87.** В одной группе числа 15, 12, 10, 9, 6, 5, 3, в другой — 14, 13, 11, 8, 7, 4, 2, 1. **88.** Пусть на единице площади травы x суточных порций, суточный прирост y порций. Имеем систему уравнений: $4(x + 12y) = 12 \cdot 14$, $5(x + 20y) = 17 \cdot 20$. Отсюда $x = 3$, $y = 3\frac{1}{4}$. Для третьего луга $6(3 + 3\frac{1}{4} \cdot t) = 24 \cdot t$. Поэтому $t = 4$ дня. **89.** Если начало работы было в $5 + x$ минут одиннадцатого, а конец в $50 + y$ минут второго, то (минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой) $12x = 50 + y$, $12y = 5 + x$. Отсюда $x = 4\frac{3}{13}$, $y = \frac{10}{13}$. Работа была окончена около 13 ч 51 мин. **90.** Равенство сумм цифр возрастов означает, что разность возрастов делится на 9. Сумма годов рождения заключена между 7722 и 7918, поэтому она равна $88^2 = 7744 = 4 \cdot 1917 + 9x + 4y$, т. е. $9x + 4y = 76$. Так как $x > 4$ и $x = 4a$, то $x = 8$, $y = 1$. Этим условиям отвечают два варианта (1918, 1927, 1936, 1963 и 1918, 1927, 1945, 1954), но в первом не выполняется условие о равенстве сумм цифр возрастов, поэтому младшему было 19 лет. **91.** Если блокнот стоил x к., то в копейках сдача первого $500 - 5x$, а второго $2500 - 31x$. Разность $2000 - 26x$ положительна и кратна 99. Это может быть при $x = 16$ к. Возможен другой подход. В сдаче первого копеек менее 25, а рублей менее 5, в сдаче второго — наоборот. С учетом делимости выясняется, что сдача первого 4 р. 20 к., т. е. цена блокнота 16 к. **92.** По условию $x = 4a + 1$, $3a = 4b + 1$, $3b = 4c + 1$, $3c = 4p$. Значит, $x = 9p + 4 + \frac{13p + 3}{27}$. Наименьшее натуральное p, при котором x — целое, равно 6, поэтому $x = 61$. **93.** Умножив обе части на 4 и прибавив по 1, получим: $(2x + 1)(2y + 1) = 7921 = (2x + 1)(2y + 1) = 89^2$. Отсюда $x = y = 44$. **94.** Прибавив к обеим частям по 1, получим: $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Поэтому неизвестные величины: 2, 22, 28 (6 вариантов). **95.** Если бабушке

$20x$ лет, внукам $4x$ и $5x$ лет, а деду $21{,}6x$ лет, причем $x = 5y$. Реальное значение $y = 1$, т. е. деду 108 лет, внукам 20 и 25 лет. **96.** Дед родился 29 февраля. Если Кате x лет, то деду $4x$, $4x + 1$, $4x + 2$ или $4x + 3$ лет, а брату Кати $4x - 1$, $4x - 2$ или $4x - 3$ лет. По условию $x - 3 + x + 4x \leqslant 107 \leqslant x - 1 + x + 4x + 3$, откуда ($x$ — целое число) $x = 18$ лет. **97.** Эти суммы от 3 до 15. Минимальные суммы могут быть получены как $1 + 2$, $1 + 3$, $1 + 4$. После этого сумму 6 уже получить нельзя. Точно так же из сумм 15, 14, 13, 12 одна не получится. Следовательно, разных сумм будет не более 11, а ребер 12. Хоть одна сумма повторится. **98.** $32^3 = 32768$. **99.** Составим таблицу двух последних цифр числа 2^n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2^n	2	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48	96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

Эти цифры начиная с $n = 21$ повторяются с периодом 20, поэтому две последние цифры числа 2^{1979} такие же, как у числа 2^{19}, т. е. 88. **100.** Начиная с $n = 5$ четыре последние цифры меняются с периодом 4 ($3125 - 5625 - 8125 - 0625$), поэтому 5^{1979} кончается теми же цифрами, что и 5^7, т. е. 8125. **101.** Как в задаче 99, можно показать, что две последние цифры числа 8 меняются с периодом 20. Поэтому $8^8 = 2^{24}$ кончается теми же цифрами, что и 2^4, т. е. 16. Но $8^{16} = 2^{48}$ кончается теми же цифрами, что и 2^8, т. е. 56. **102.** $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$; $7^7 = 823543$; $7^8 = \ldots 64801$; $7^{16} = \ldots 69601$; $7^{20} = \ldots 12001$; $7^{40} = \ldots 24001$; $7^{80} = \ldots 48001$; $7^{100} = \ldots 60001$; $7^{200} = \ldots 20001$; $7^{400} = \ldots 40001$; $7^{500} = \ldots 00001$. Таким образом, последние пять цифр числа 7^n меняются с периодом 500. Число $x = 7^{7^7} = 7^{823543}$ имеет такие пять последних цифр, как число 7^{43}, т. е. 32343. Число 7^x имеет такие же пять последних цифр, как число 7^{343}, т. е. 52343. Таким образом, $7^x - x = \ldots 20000$; в конце четыре нуля. **103.** Пусть $x^x + 1 = y^2$. Четным x быть не может, так как в этом случае x^x — квадрат, а следующий квадрат натурального числа превышает его больше чем на 1. Тогда $(y - 1)(y + 1) = x^x$. Но $y - 1$ и $y + 1$ — последовательные нечетные числа, поэтому они взаимно просты. Каждое из них должно быть степенью натурального числа x. Но разность квадратов, кубов... натуральных чисел больше 2, поэтому множество натуральных x, удовлетворяющих условию задачи, пустое. **104.** а) Пусть $1{,}23687 = x$, тогда ответ: $-\frac{11}{45}$. б) Пусть $1{,}2345 = x$; $0{,}7655 = y$, тогда $x + y = 2$. Ответ: 16. в) $0{,}34782 = x$, $0{,}65218 = y$, $x + y = 1$. Ответ: 1. г) $8765417 = x$. Ответ: -255. д) $25{,}672 = x$. Выражение равно $3x$, т. е. 77,016. е) Если $x = 876543217$, то делимое — $12x\,(2x^2 + 13)$, а делитель — $6\,(2x^2 + 13)$. Частное равно $2x$, т. е. 1753086434. ж) $x = 1{,}2319$, $y = 0{,}7681$; $x + y = 2$. Делимое — $13\,(1 - xy)$, а делитель — $4\,(1 - xy)$. Ответ: 3,25. **105.** а) x — четное число. Одно из рассматриваемых чисел кончается цифрой 5. Простым оно может быть только при $x = 2$. В этом случае искомые числа: 5, 17, 37. б) x — нечетное число. Одно из рассматриваемых чисел кончается цифрой 5. Простым оно будет при $x = 5$. Искомые числа: 5, 29, 31. **106.** а) 1 или 19; б) 1. **107.** При $x > 0$ имеем: $(x + 2)^3 > x^3 + 9x + 2$, т. е. $(x + 1)^3 = x^3 + 9x + 2$. Но это уравнение не имеет целых корней. При $x < 0$ положим $x = -y$. Придем к уравнению $3y^2 - 6y + 3 = 0$, $y = 1$. При $x = -1$ данное выражение равно $(-2)^3$. **108.** $a = -b - c$; $a^2 = b^2 + 2bc + c^2$; $bc = a^2 - 0{,}5$; $a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 1$; $a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2\,(a^2 - 0{,}5)^2 - 2a^2\,(1 - a^2) = 0{,}5$. **109.** а) В этом числе больше двух цифр, так как двузначное число превышает сумму своих цифр не более чем в 10 раз. В нем менее четырех цифр, так как у четырехзначного числа сумма цифр менее числа более чем в 57 раз. Если же число трехзначное, то получается уравнение $100x + 10y + z = 17\,(x + y + z)$. Его решение: $x = 1$, $y = 5$, $z = 3$. б) Это число четырехзначное, последняя цифра 0 или 5. Проверка обоих вариантов приводит к ответу: 2790. **110.** Сперва показываем, что $(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = 99\,(x^2 - y^2)$. Затем устанавливаем, что утверждение верно для трехзначного и произвольного многозначного числа. **111.** Сумма цифр данного числа 51, т. е. при делении его на 9 остаток равен 6. Между тем у квадрата этот остаток 0, 1, 4 или 7. **112.** После первого вычитания получаем число, кратное 9. При дальнейших вычитаниях эта особенность сохранится, и в итоге получится 0. **113.** По условию (рис. 50) $\widehat{AOB} = 60°$. Если $|AB| = x$, то $|DO| = \frac{x - 90}{2}$, $|CO| = x - 90$, $|AD| = x - \frac{x - 90}{2} = \frac{x + 90}{2}$. Так как $\frac{x + 90}{2} : 90 = x : (x - 37{,}5)$, то $x = 150$ км. **114.** Если неполное частное x, то число $4x + 1$, $4x + 2$ или $4x + 3$. Из уравнений $(4x + 1)^2 + 5 = 161x$, $(4x + 2)^2 + 5 = 161x$, $(4x + 3)^2 + 5 = 161x$ натуральный корень имеет только второе ($x = 9$). Искомое число 38. **115.** Если скорость первого x м/с, то скорость второго $10 : \left(\frac{10}{x} - 1\right) = \frac{10x}{10 - x}$ м/с. По условию $10x + 9 \times \frac{10x}{10 - x} = 2 \cdot 50$; $x_1 = 4$, $x_2 = 25$. Второй корень посторонний, бегуны встретились в 10 м от финиша. **116.** $p^4 - 75p + 75 = p^2\,(p^2 - 5p + 5) + 5p\,(p^2 - 5p + 5) + 20\,(p^2 - 5p + 5) - 25 = -25$. **117.** Мотоциклист в 3 часа дня был на $210 - 3x$ километре, а в 2 часа дня на $180 - 3x$ километре. В это время второй автобус догнал туристов на 200-м километре, до столба 80-го километра оставалось 120 км, а до мотоциклиста $20 + 3x$ км. По условию $\frac{120}{x} - \frac{20 + 3x}{30 + x} = 0{,}6$, отсюда скорость автобуса $x = 45$ км/ч. Второй автобус отставал от первого на $2 \cdot 45 - 10 = 80$ км. **118.** а) Все слагаемые, как четные степени, неотрицательны. Равенство суммы 0 возможно, если $2x^2 - x - 3$ и $2x^2 + x - 6$ одновременно равны 0. Это может быть только при $x = 1{,}5$. б) Левая часть положительна. Судя по левой час-

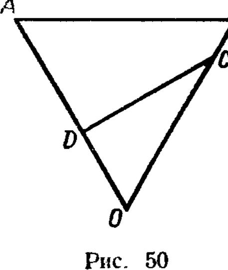
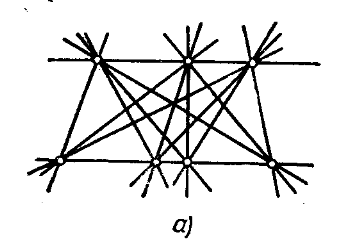


Рис. 50

ти, $x \geqslant \sqrt{24}$. При возрастании x левая часть растет, а правая убывает; значит, уравнение имеет только один корень. При $x = 5$ обе части равны. Других корней уравнение не имеет. **119.** Заменяя числа x и y их неотрицательной разностью $|x - y|$, мы уменьшаем общую сумму на $2x$ или на $2y$, т. е. на четное число. Но общая сумма написанных чисел $\frac{1982 \cdot 1983}{2}$ нечетна. Вычитая из нее четные числа, нельзя получить 0. **120.** 5 : 3. **121.** 2 : 1. **122.** В левом верхнем углу 13. **123.** Верхняя строка — 27, 54, 108, 216. **124.** Первая цифра четырехзначного числа 1, поэтому оно 1111 или 1248. Первый вариант не соответствует условию. 1248 — 990 = 258. **125.** Эти последние цифры чередуются с периодом 10 : 4, 5, 4, 1, 6, 9, 0, 9, 6, 1, 4, 5, ... Последняя цифра суммы каждого десятка 5, поэтому сумма квадратов первых 34560 членов есть последняя цифра произведения 3456 · 5, т. е. 0. Искомая цифра определяется суммой 4 + 5 + 4 + 1 + 6 + 9 + 0, т. е. равна 9. **126.** $10^{62} \leqslant x^{47} < 10^{63}$; $62 \leqslant 47 \lg x < 63$; $1{,}319 \leqslant \lg x < 1{,}351$; $20{,}84 \leqslant x < 21{,}93$. Так как x — целое число, то $x = 21$.

Знаете ли вы геометрию?

1. 1, 5, 6, 8 или 10. **2.** Да. Примеры приведены на рис. 51. **3.** Так как $|A_2A_3| = |A_1A_2| + |A_3A_4| + |A_4A_1|$, то все фермы расположены на одной прямой. Поэтому $|A_1A_3| = 3{,}6 + 4{,}1 = 7{,}7$ км. **4.** Отметим на данной прямой l какие-нибудь точки A и B и построим $M_1 = \text{Окр}(A, |AM|) \cap \text{Окр}(B, |BM|)$. Так как $M_1 = S_l(M)$, то $(MM_1) \perp l$. При использовании замечательного свойства окружности возможно другое решение. Строим две окружности с центром M так, что радиус второй вдвое больше радиуса первой и больше расстояния от точки M до прямой l. Если вторая окружность пересекает l в точке A, а $[AM]$ пересекает первую окружность в точке O, то Окр $(O, |OA|)$ определяет на l искомое основание перпендикуляра B (рис. 52).



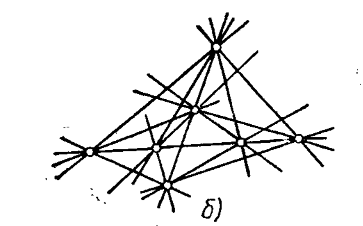


Рис. 51

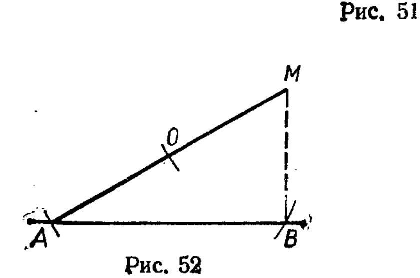


Рис. 52

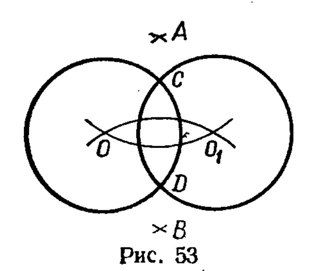


Рис. 53

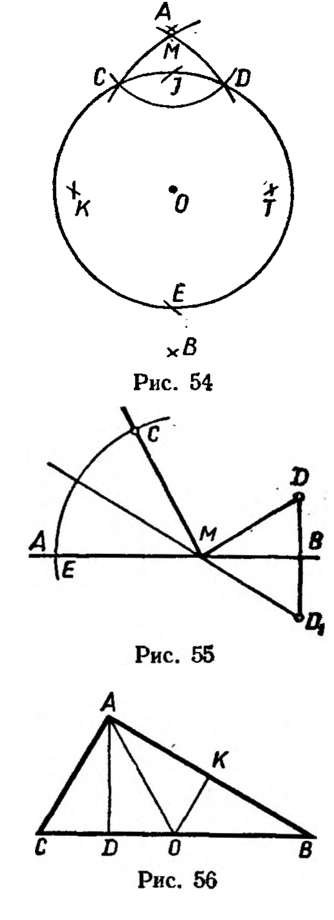


Рис. 54

Рис. 55

Рис. 56

5. Окружность, симметричная данной относительно (AB), имеет с данной окружностью общие точки на оси симметрии, поэтому строим точку $O_1 = \text{Окр}(A, |OA|) \cap \text{Окр}(B, |OB|)$. Окружность с центром O_1, конгруэнтная данной, пересекает данную в искомых точках (рис. 53). Это решение не годится, если $O \in (AB)$. В этом случае построение выходит за рамки школьной программы. Пусть (рис. 54) окружность с центром A и радиусом меньше $|OA|$ пересекает данную окружность в точках C и D. Найдем точки K и T как четвертые вершины параллелограммов $ODCK$ и $OCDT$. Затем построим точку M, удаленную от K и T на $|TC|$. По свойству параллелограмма[1] $|TC|^2 = 2|CD|^2 + 2R^2 - R^2 = 2|CD|^2 + R^2$. Значит, расстояние от K до середины дуги CD равно $|MO|$. По этой точке J легко найти и другую точку пересечения (AB) с данной окружностью. **6.** Пусть $B_1 = S_l(B)$ и $M \in l$, тогда $|MA| - |MB_1| \leqslant |AB|$. Наибольшая величина разности получается в том случае, когда $M = (AB_1) \cap l$. **7.** Если $D_1 = S_{AB}(D)$, то (D_1M) — ось симметрии $\angle AMC$. $(AB) \cap \text{Окр}(D_1, |D_1C|) = E$. Ось симметрии точек C и E определяет точку M (рис. 55). **8.** Пусть $[AD]$ — высота, $[AO]$ — медиана (рис. 56), тогда $|CD| = |DO|$. Построим $[OK] \perp [AB]$. Из конгруэнтности треугольников AOD и AOK следует, что $|OK| = |OD| = \frac{1}{2}|OB|$, поэтому $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{A} = \frac{3}{2}(90° - 30°) = 90°$. **9.** Проведем луч AC в сторону точки B, он пройдет на некотором расстоянии от B. Отложим на этом луче конгруэнтные отрезки $AC_1, C_1C_2, \ldots, C_{n-1}C_n$ и соединим отрезком B с C_n. Проведя через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ лучи, сонаправленные с $[C_nB]$, отметим на них соответственно точки $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ так, что $|C_1D_1| = \frac{1}{n}|C_nB|$, $|C_2D_2| = \frac{2}{n}|C_nD|$, ... Эти точки принадлежат искомой прямой. Правильность построения следует из теоремы Фалеса. Если позволяют возможности циркуля, строим окружности с центрами A и B, пересекающиеся в точках C и D. Ось симметрии точек C и D — искомая прямая. Можно было построить лучи AC и BC. Искомая прямая параллельна отрезку, соединяющему середины отрезков

[1] Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Данное предложение можно доказать с помощью теоремы косинусов.

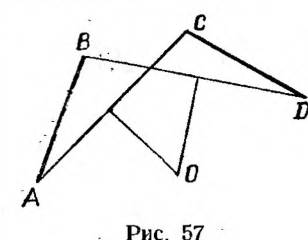


Рис. 57

AC и BC. Но и это построение не всегда осуществимо. **10.** Так как сумма углов, образованных средней линией со стороной, равна 180°, то сумма величин внутренних углов при этой стороне 90°, т. е. третий угол прямой. Если $\widehat{A} = x$, $\widehat{B} = 90° - x$, то $2x = 90° - x$, $x = 30°$, т. е. $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{B} = 60°$. **11.** Вертикальную — ТОПОТ, ПОТОП, горизонтальную — СЕНО, СОН, ВЕС, ВОЗ, ЭХО, СОК, КОН. **12.** Если $[AB] \cong [CD]$, а оси симметрии отрезков AC и BD пересекаются в точке O, то центр поворота O, а угол поворота $\widehat{AOC}$ (рис. 57). Если $[AB] \parallel [CD]$, то $O = (AC) \cap [BD]$, а угол поворота 180°. **13.** (AD) — ось симметрии $\angle BAC$ (рис. 58), поэтому $|CD| = |DK|$. Аналогично $|EM| = |EC|$, поэтому $\widehat{KCD} = \widehat{CAD} = \frac{1}{3}\widehat{BAC}$ и $\widehat{MCA} = \widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. $\widehat{MCK} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 45°$. **14.** В прямоугольном. **15.** 1 : 2. **16.** 120, 30, 30°. **17.** $S_M(O_1) = O_3$; Окр $(O_3, R_1) \cap$ Окр $(O_2, R_2) = \{M, A\}$. Прямая MA искомая. **18.** Построим $l_4 \parallel l_1$ так, чтобы расстояние от l_1 до l_4 равнялось расстоянию от l_2 до l_3 и l_4 находилась в полосе, ограниченной l_1 и l_3. Если данная разность a, то строим окружность радиуса a с центром $A \in l_4$. Если она пересекает l_2 в точках B и C, то искомые прямые проходят через данную точку M соответственно параллельно (AB) и (AC) (рис. 59). **19.** 1. Пусть данные шары M и N. Строим $M_1 = S_{BC}(M)$; $M_2 = S_{CD}(M_1)$; $(M_2N) \cap [CD] = E$; $(M_1E) \cap [BC] = K$. Направление удара $[MK)$ (рис. 60). Если шар отражается от бортов BC и AD, построение аналогичное. 2. а) 36 и 54°; б) 15 и 75°. **20.** Для тупоугольного треугольника построение очевидно. Для любого треугольника ABC внутри найдется такая точка O, что углы AOB, AOC, BOC тупые (например, точка пересечения

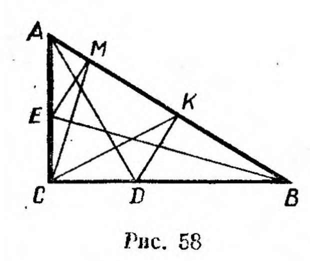


Рис. 58

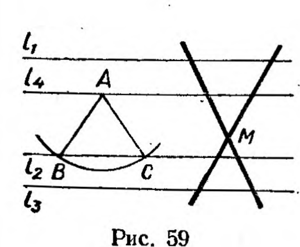


Рис. 59

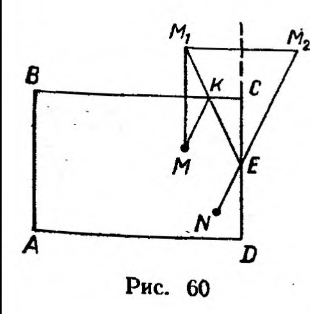
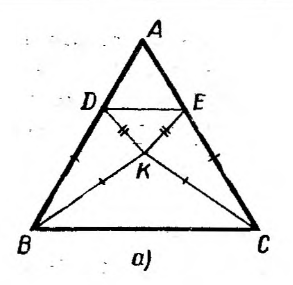
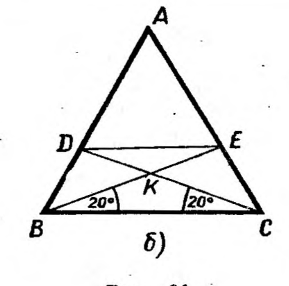


Рис. 60





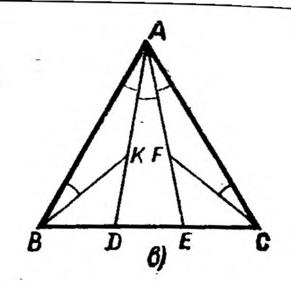
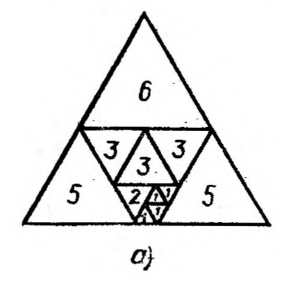
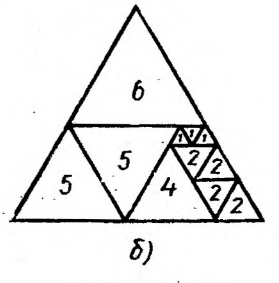


Рис. 61

биссектрис). **21.** Медиана, проведенная к гипотенузе, делит прямоугольный треугольник на 2 равнобедренных, поэтому любой треугольник можно разрезать на 2 прямоугольных, а затем на 4 равнобедренных. Можно предварительно отсечь равнобедренный, а остаток делить на 4 равнобедренных. Несколько иначе разрезается равносторонний треугольник (см. задачи 23 и 112). **22.** Пусть $\widehat{ACB} = 3\widehat{A}$. Выберем на $[AB]$ точку D так, чтобы $\widehat{A} = \widehat{ACD}$, тогда $\widehat{BDC} = 2\widehat{A} = \widehat{BCD}$. Следовательно, $\triangle ADC$ и $\triangle BCD$ равнобедренные. **23.** Несколько решений показано на рисунке 61. **24.** Несколько решений приведено на рисунке 62. В каждом случае треугольник разрезан на 11 частей. **25.** Выполним параллельный перенос $\vec{a}$ одной из окружностей (направление переноса определено условием). Пересечение образа этой окружности с другой окружностью — конец искомого отрезка. Число возможных решений — 2, 1 или 0. **26.** Если вместо вершины A_1 взять произвольную точку B_1, то далее по положению середин сторон можно будет найти возможные положения вершин B_2, B_3, ..., B_7, B_8. Если B_8 совпадает с B_1, построение верно. Если они не совпадают, то (по свойству центральной симметрии) отрезки B_1A_1, B_2A_2, ..., B_8A_1 конгруэнтны и параллельны, т. е. точка A_1 — середина B_1B_8. Найдя A_1, легко построить остальные вершины. Если изучено умножение вектора на число, то можно показать, что если





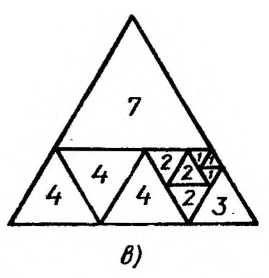


Рис. 62

$[AD]$ — медиана треугольника ABC, то $\overrightarrow{AD} = 0{,}5\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Пусть M — произвольная точка, тогда $\overrightarrow{MB_1} - \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MB_3} - \overrightarrow{MB_4} + \overrightarrow{MB_5} - \overrightarrow{MB_6} + \overrightarrow{MB_7} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} - \overrightarrow{MA_4} - \overrightarrow{MA_5} + \overrightarrow{MA_5} + \overrightarrow{MA_6} - \overrightarrow{MA_6} - \overrightarrow{MA_7} + \overrightarrow{MA_7} + \overrightarrow{MA_1}) = \overrightarrow{MA_1}$. Выполнив действия над векторами, получим точку A_1. Возможно решение, опирающееся на известное по задаче свойство: середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Пользуясь этим, можно построить точку D — середину $[A_1A_4]$, затем строится точка E как четвертая вершина параллелограмма DB_4B_5E. Найдя так середины всех сторон треугольника $A_1A_7A_6$, легко построим его вершины. **27.** Аналогично решению предыдущей задачи. **28.** $x_1 + x_2 = 257°$, $x_2 + x_3 = 224°$, $x_3 + x_4 = 243°$, $x_4 + x_5 = 286°$, $x_5 + x_6 = 303°$, $x_6 + x_7 = 234°$, $x_7 + x_1 = 253°$. Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 803°$. Значит, $x_7 = 900° - 803° = 97°$ и т. д. **29.** Построим $\triangle ACK = S_{AC}(\triangle ABC)$, тогда $\widehat{KAD} = \widehat{EAD}$ и $\triangle AKD \cong \triangle AED$. Поэтому $\triangle KCD$ равносторонний. Пусть $\widehat{BAC} = x$, $\widehat{EAD} = y$, тогда величины углов треугольника ACD равны $x + y$, $60° + x$ и $60° + y$. Отсюда $x + y = 30°$, т. е. $\widehat{CAD} = 30°$, $\widehat{BAE} = 60°$ (рис. 63). Можно было учесть, что K — центр окружности, проходящей через точки A, C, D, и использовать свойство вписанных углов: $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\widehat{CKD} = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$. Возможно и решение без помощи симметрии: $\widehat{BCD} + \widehat{CDE} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA} + \widehat{ADE} = \widehat{BAC} + \widehat{EAD} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA} = \widehat{CAD} + \widehat{ACD} + \widehat{CDA} = 180°$, поэтому $BCDE$ — параллелограмм, $|BE| = |CD|$, т. е. $\triangle ABE$ равносторонний. $\widehat{BAE} = 60°$. **30.** Если внутренний угол многоугольника острый, то внешний угол при той же вершине тупой. Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника (взятых по одному при каждой вершине) 360°, то среди них тупых углов больше трех быть не может. **31.** Она равна сумме углов треугольников, прилежащих к внутреннему пятиугольнику (180° · 5) без суммы всех внешних углов многоугольника (360° · 2), т. е. равна 180°. **32.** По свойству биссектрисы угла точки $A_1 = S_{l_1}(A)$ и $A_2 = S_{l_2}(A)$ принадлежат (BC). Построив (A_1A_2), определим положение вершин B и C на данных прямых. **33.** Задача имеет ряд решений, основанных на различных идеях. а) Проведем k параллельных прямых, каждая из которых проходит хотя бы через одну из данных точек, а каждая точка принадлежит одной из этих прямых. После соединения смежных прямых отрезками и

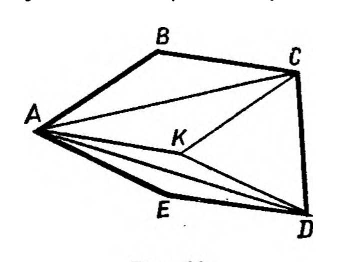
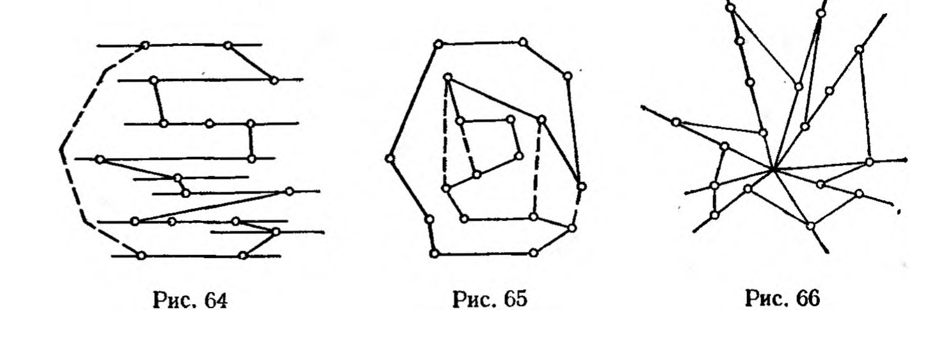


Рис. 63


Рис. 64 Рис. 65 Рис. 66

соединения ломаной первой точки с последней получится искомая линия (рис. 64). б) Соединим n_1 точек отрезками так, чтобы внутри полученного многоугольника оказались остальные точки. Из внутренних точек соединим таким же образом n_2 точек, затем n_3 точек и т. д., пока не исчерпаем всех точек. Из каждой пары смежных многоугольников выбросим по стороне, а концы выбрасываемых отрезков соединим. В итоге получится замкнутая ломаная без самопересечения, соединяющая все данные точки (рис. 65). в) Возьмем на плоскости какую-нибудь точку M и проведем из нее все лучи, каждый из которых содержит, по крайней мере, одну из данных точек, а каждая точка принадлежит одному лучу. Соединим самую отдаленную от M (из числа данных) точку первого луча с ближайшей к M (из числа данных) точкой второго луча, самую удаленную от M точку второго луча с ближайшей к M точкой третьего луча и т. д. Так получится искомая ломаная (рис. 66). **34.** Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости. В одной оказываются вершины A_1, A_3, A_5, ..., A_{1979}, в другой — A_2, A_4, A_6, ... Таким образом, сторону A_1A_{1979} эта прямая не пересекает. **35.** Сумма внутренних углов всех получающихся треугольников включает сумму внутренних углов n-угольника и сумму углов при названных точках, т. е. $180°\,(n - 2) + 360° \cdot k = 180°\,(n - 2 + 2k)$. Таким образом, треугольников окажется $n - 2 + 2k$. **36.** Если длины четырех сторон обозначить $6x$, $7x$, $9x$, $11x$, то $80{,}4 < 6x + 7x + 9x + 11x < 160{,}8$, т. е. $2{,}4 < x < 4{,}9$. Так как x — целое число, то x равно 3 или 4. Длина пятой стороны 28,8 см или 61,8 см. **37.** Анализ. Проведем из середины $[AC]$ перпендикуляры $[OM]$ и $[OJ]$ к боковым сторонам. Треугольники AOM и COJ конгруэнтны, поэтому $|MO| = |OJ|$, $\widehat{MOJ} = 120°$. Поворот на 120° около центра O отображает прямую BC на (AB). Построение. $R_0^{120°}(T) = P$. Строим (PK) и через точку O под углом в 60° к ней (OA) (рис. 67). **38.** Если данные точки O, K, M (рис. 68), то $[OK]$ и $[OM]$ — средние линии треугольника AA_1C и ACC_1. Поэтому легко построить прямые AA_1 и CC_1 (они соответственно перпендикулярны к $[OK]$ и $[OM]$). Если они пересекаются в точке H, то приходим к задаче: «Внутри угла AHC дана точка O. Требуется построить отрезок с концами на

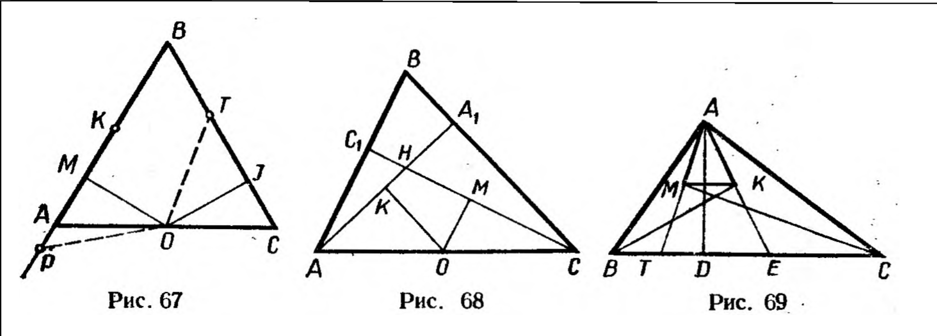


Рис. 67 Рис. 68 Рис. 69

сторонах угла и серединой в точке O». **39.** Если (рис. 69) $\widehat{DAE} = x$, то $\widehat{EAC} = x$, $\widehat{B} = \widehat{DAC} = 2x$, $\widehat{BAE} = 90^\circ - 2x + x = 90^\circ - x = \widehat{BEA}$. Следовательно, $|AB| = |BE|$. **40.** Используйте результат задачи 39. **41.** 26, 72, 82° или 46, 62, 72°. **42.** Проведем $[TD] \parallel [BC]$. По свойству средней линии $|EK| = |EM|$, $|DE| = \frac{1}{2}|ET|$, $|DK| = |KA| = |DB|$. На этом основано построение (рис. 70). Последовательно строим E — середину $[KM]$. Затем точки D, B, A, C. **43.** Если выполнить параллельный перенос так, чтобы образом $[AB]$ оказался $[CD]$, то образом M окажется точка M_1. Построив $\triangle CDM_1$ по длинам его сторон, выполним перенос $\overrightarrow{M_1M}$. Это определит точки A и B. Если $\triangle CDM_1$ можно построить, решений два; если $|MA| + |MB| = |CD|$, решений бесконечно много; если $|MA| + |MB| < |CD|$, решений нет. **44.** Найдем O — середину $[AC]$ и построим $M_1 = Z_0(M)$. Расстояния от M и M_1 до B известны, поэтому построим точку B, а затем D. **45.** 30, 30, 120°. **46.** Проведем перпендикуляр BQ к $[AM]$. Так как $\widehat{OBM} = 30^\circ$, то $|OM| = \frac{1}{2}|BM| = |CM|$, т. е. $\widehat{MOC} = \widehat{MCO} = \widehat{BMO} : 2 = 30^\circ$. Следовательно, $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, т. е. $|OC| = |OB|$. При этом $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$, т. е. O — центр окружности, проходящей через точки A, B, C и $\triangle ABO$ равнобедренный. $\widehat{ABO} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Возможны и другие решения. **47.** Пусть $[AD]$ — высота. По условию $|AB| \cdot |AC| \cdot |BC| = 4\,|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$; $|BC| = 4\,|AD|$. Проведем медиану AO (рис. 71), тогда $|AO| = 2|AD|$, $\widehat{AOD} = 30^\circ$. Поэтому $\widehat{C} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 75^\circ$. **48.** Так как $b \leqslant h_b \leqslant a$ и $a \leqslant h_a \leqslant b$, то $a = b = h_a = h_b$, т. е. это равнобедренный треугольник. **49.** Если $[AD]$ и $[BE]$ — биссектрисы, то проведем $[DK] \parallel [BE]$ (рис. 72). Тогда $\triangle ADK$ равнобедренный. Если $\widehat{C} = 2x$, то $\widehat{DAC} = 90^\circ - 2x$, $\widehat{AKD} = 3x$. Поэтому $90^\circ - 2x = 3x$, $x = 18^\circ$. Величины углов: 36, 36, 108°. **50.** Если биссектриса угла ABM пересекает $[CM)$

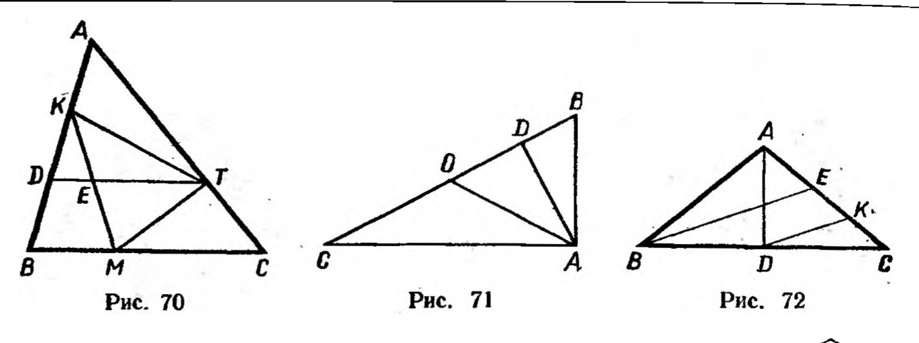


Рис. 70 Рис. 71 Рис. 72

в точке O (рис. 73), то O принадлежит высоте AD. Так как $\widehat{BOA} = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$ и $\widehat{BOC} = 180^\circ - 30^\circ \cdot 2 = 120^\circ$, то треугольники BOA и BOC конгруэнтны, т. е. $\widehat{BMA} = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. **51.** Используя результат задачи 50, установим, что $|BM| = |AB|$. Поэтому $\triangle ABM$ равносторонний, $\widehat{BMA} = 60^\circ$. **52.** Величина каждого угла 120°. Продлив стороны AB, CD, EF, получим равносторонний $\triangle KML$ (рис. 74). Поэтому $|KA| + |AB| + |BL| = |LC| + |CD| + |DM| \rightarrow |AB| - |DE| = |CD| - |AF| \rightarrow |AB| - |DE| = |CD| - |AF|$. **53.** 4,8 и 19,2 см. **54.** $[AC_1]$, $[MB]$ и $[CA_1]$ конгруэнтны и параллельны. Поэтому $[CC_1]$ проходит через середину $[AA_1]$. Точно так же устанавливается, что и $[BB_1]$ проходит через середину $[AA_1]$. **55.** $|AM| + |MC| < |AD| + |CD| < |BM| + |MD| < |AB| + |AD|$ (рис. 75). Сложив эти неравенства, получим искомое соотношение. **56.** а) Использовать центральную симметрию. Если $l_5 = Z_0(l_1)$, то $l_5 \cap l_3 = C$; $(CO) \cap l_1 = A$, $Z_0(l_2) = l_6$, $l_6 \cap l_4 = D$, $(DO) \cap l_2 = B$. Решений 0, 1 или ∞. б) Аналогично решению задачи 56, а. **57.** Середины сторон четырехугольника — вершины параллелограмма. Стороны четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$ соответственно параллельны и вдвое больше сторон названного параллелограмма. **58.** Отрезок, соединяющий середины $[AB]$ и $[AD]$, делится диагональю $[AC]$ на конгруэнтные части и делит ее так, что $|TC| = 3\,|AT|$. **59.** Пусть даны точки $K \in (AB)$, $L \in (BC)$, $M \in (CD)$, $N \in (AD)$ и O. Строим $T = Z_0(K)$. Точки T и M определят (CD). **60.** 45°. **61.** 60°. **62.** 75°.

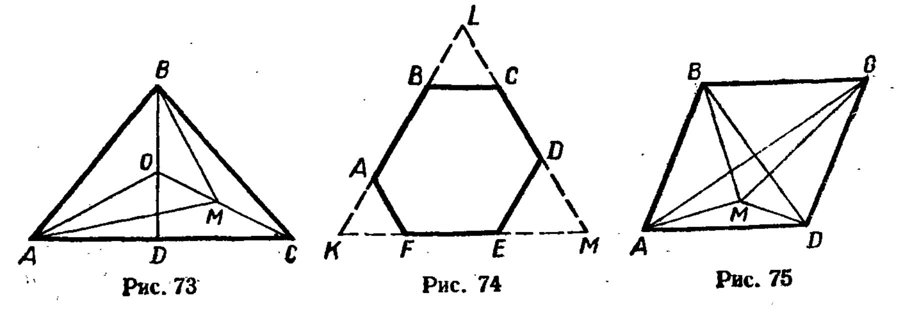


Рис. 73 Рис. 74 Рис. 75

63. 64. Аналогично задаче 56. **65.** 45°. **66.** Ромб. **67.** 60 и 120°. **68.** Аналогично задаче 56. **69.** Построим квадраты, симметричные данным относительно (AD). Тогда (рис. 76) $|TP| = |AP| = |AM|$, $\widehat{MAD} + \widehat{TAD} = \widehat{PAD} + \widehat{TAD} = \widehat{TAP} = 45°$. Поэтому $\widehat{KAB} + \widehat{MAC} + \widehat{TAD} = 45° + 45° = 90°$. **70.** Если $[MN]$ — общий перпендикуляр (BC) и (AD), то через его середину E строим $(KE) \perp (AB)$ и отметим $|KO| = |ME|$. При конфигурации на рисунке 36 вместо общего перпендикуляра строим $(MP) \perp (BC)$ и $(NT) \perp (AD)$, а затем $(PT) \perp (MP)$. Отметив точку E на (MP) так, что $|EM| = \frac{1}{2}(|MP| + |TN|)$, строим $(KE) \perp (AB)$ и находим на (KE) точку O, чтобы $|KO| = |E'M|$. **71.** $PATO$ — квадрат с длиной стороны $\frac{l}{2}$. **72.** Построим окружность, симметричную относительно l Окр (O_1, R_1), ее пересечение с Окр (O_2, R_2) определит одну из вершин квадрата. Решение 2, 1 или 0. **73.** Если известно, что $|MA| = a$, $|MB| = b$, то выполним $R_O^{90°}(M) = M_1$. Тогда известны расстояния от A до M и M_1. **74.** Выполните поворот вокруг центра квадрата на 90°. **75** Если $M \in (AB)$ и $N \in (CD)$, то строим $M_1 = Z_0(M)$. Точки M_1 и N определяют (CD). После этого легко построить (AB). Диагонали проходят через центр O под углами по 45° к (AB). **76.** Первое решение. Соединим середины сторон K, T, M отрезками. $\triangle O_1KT \cong \triangle O_3MT$, так как $[O_3M]$ и $[KT]$, $[TM]$ и $[KO_1]$ конгруэнтны и взаимно перпендикулярны (рис. 77). Отсюда следует, что $|OT| = |O_1T|$ и $\widehat{O_3TO_1} = 90°$, т. е. $\widehat{O_1O_3T} = \widehat{O_3O_1T} = 45°$. Второе решение. Построим параллелограмм O_2TMP. У ломаных O_1KMA и O_3MPO_2 звенья соответственно конгруэнтны и взаимно перпендикулярны. Поэтому замыкающие отрезки O_1A и O_2O_3 конгруэнтны и взаимно перпендикулярны. Это позволяет просто найти вершины A, B, C. Третье решение. Возьмем наугад точку A_1 вместо A и выполним построения: $R_{O_3}^{90°}(A_1) = A_2$, $R_{O_1}^{90°}(A_2) = A_3$, $R_{O_2}^{90°}(A_3) = A_4$. Легко заметить, что $|AA_1| = |BA_2| = |CA_3| = |AA_4|$, причем $\widehat{A_1AA_4} = 90°$. Поэтому по A_1 и A_4 можно построить вершину A. Далее ясно.

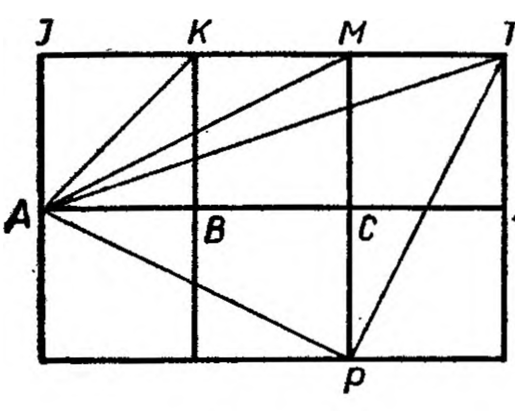


Рис. 76

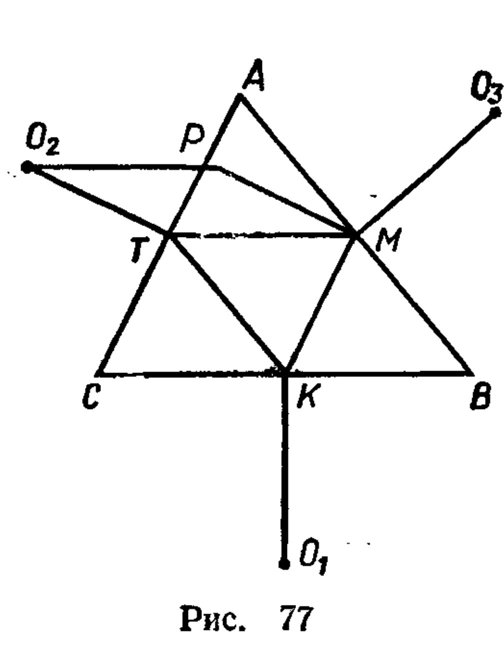


Рис. 77

77. Возьмем на l_2 произвольную точку B. При повороте вокруг B на 90° вершина A отображается на C. Поэтому выполним $R_B^{90°}(l_1) = l_4$, $l_4 \cap l_3 = C$. По B и C строим квадрат $ABCD$. Чтобы вершина D принадлежала данной окружности, выполним параллельный перенос $\overrightarrow{DD_1}$ или $\overrightarrow{DD_2}$. Задача имеет решений 0, 2 или 4 (рис. 78). **78.** Центр квадрата и вершины 8 равносторонних треугольников, каждый из которых построен на стороне квадрата (всего 9 точек). **79.** Так как $M = R_T^{60°}(K)$ или $M = R_T^{-60°}(K)$, то искомое множество состоит из двух квадратов, на которые отображается данный квадрат при повороте около T на ±60°. **80.** 72°. **81.** Нет. **82.** Проведем $[BK] \perp [AD]$ и $[CM] \perp [AD]$. Тогда $|AK| = |KM| = |MD| = 2|KE|$. Построим $[KT] \perp [AO]$. Так как $|TK| = |KE|$, то $|TK| = \frac{1}{2}|AK|$, т. е. $\widehat{TAK} = 30°$ (рис. 79). Следовательно, $\widehat{AOD} = 120°$, $\widehat{BEC} = 60°$. **83.** Пусть $|BC| = a$, $|AD| = b$, $|EK| = |KT| = |TH| = x$ (рис. 80). Тогда $\frac{x}{a} = \frac{|AK|}{|AC|}$; $\frac{2x}{b} = \frac{|KC|}{|AC|}$, т. е. $\frac{x}{a} + \frac{2x}{b} = 1$, $x = \frac{ab}{2a+b}$, $|EH| = \frac{3ab}{2a+b}$. **84.** Пусть $l_1 \cap l_2 = T$. Проведем через O прямую $l_3 \parallel l_1$. Если $l_3 \cap l_2 = E$, то $|TE| = |EC|$. Это позволяет построить C, затем $A = (CO) \cap l_1$; $(AM) \cap l_2 = D$, $[BC] \parallel [AM]$. **85.** Решение показано на рисунке 81. **86.** Проведем вдоль сторон прямоугольника прямые, отсекая полосы шириной по 1 см (рис. 82). Площадь их общих частей 4 см². Значит, центральная часть имеет площадь 4 см², т. е. образует прямоугольник 1×4 или 2×2. Искомый прямоугольник 3×6 или 4×4, т. е. имеет периметр 18 см или 16 см. **87.** Прямая, проходящая через середины отрезков AM и BM, заменяет ломаную AMB более короткой границей KP. Отрезок JT, перпендикулярный к l_1 и проходящий через середину $[KP]$, является решением задачи

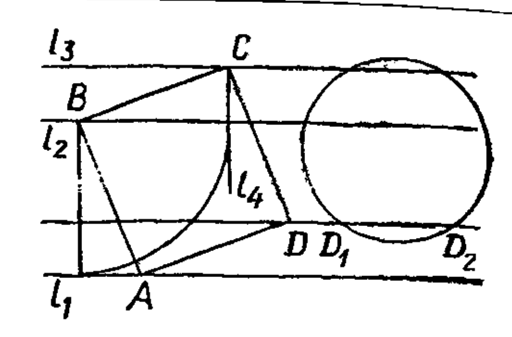


Рис. 78

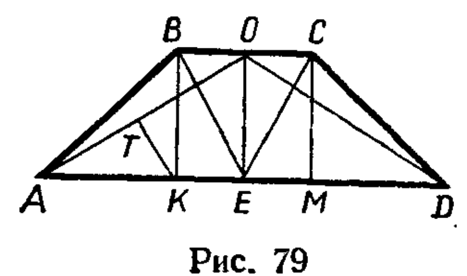


Рис. 79

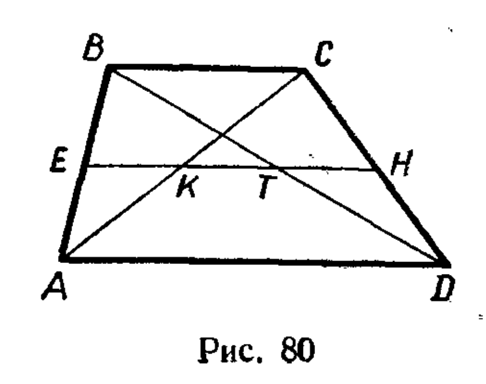


Рис. 80

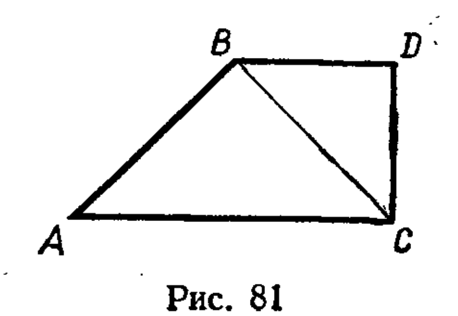


Рис. 81

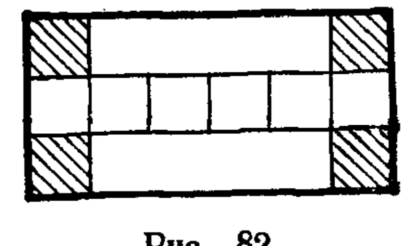


Рис. 82

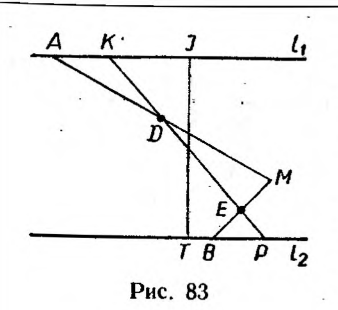


Рис. 83

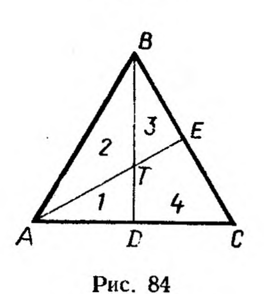


Рис. 84

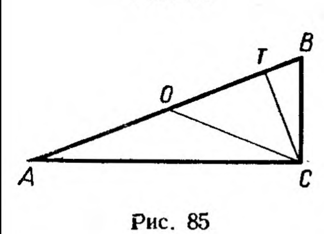


Рис. 85

(рис. 83). Правильность построения легко устанавливается. **88.** Пусть площади фигур ADT, ABT, BET и $CDTE$ соответственно S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 84). Из трех возможностей, допускаемых условием: 1) $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$; 2) $S_1 = S_4$, $S_2 = S_3$; 3) $S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$, первые две противоречивы. Третья означает, что две высоты оказываются и медианами, т. е. $\triangle ABC$ равносторонний, величины углов по 60°. **89.** Соединим эту точку M с вершинами. Если длина стороны a, а расстояния от M до стороны x, y, z, то $S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM} = S_{ABC}$, т. е. $\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2}, x + y + z = h$. **90.** $\widehat{CAB} = 15°$. Построим $\triangle ACD$ симметричный $\triangle ABC$ относительно оси AC. В треугольнике ABD длины двух сторон по a, величина угла между ними 30°, поэтому его высота $|DK| = \frac{a}{2}$, площадь $\frac{a^2}{4}$. Искомая площадь вдвое меньше. Можно было построить медиану CO. Так как $|CO| = \frac{|AB|}{2} = |AO|$, то $\widehat{COB} = 15° \cdot 2 = 30°$. Поэтому $[CT]$ — катет треугольника COT, лежащий против угла в 30° (рис. 85). Следовательно, $|CT| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$. $S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$. **91.** Так как треугольники ABC и ACD равновелики, то их высоты $|BK|$ и $|DE|$ одинаковы. Поэтому диагональ AC делит $[BD]$ пополам. Аналогично доказывается, что и $[AC]$ делится диагональю BD пополам. Значит, $ABCD$ — параллелограмм. **92.** Так как площадь треугольника не превышает полупроизведения длин двух его сторон, то $S_4 \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$ и $S_4 \leqslant \frac{bc}{2} + \frac{ad}{2}$. Отсюда $S_4 \leqslant \frac{ab + cd + bc + ad}{4} = \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}$. **93.** $a - b = h_a - h_b$; $a - b = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a}$; $a - b = \frac{2S}{ab}(a - b)$. Следовательно, либо $a = b$, либо $2S = ab$. В первом случае $\hat{A} = \hat{B} < 90°$, во втором — $\triangle ABC$ прямоугольный, $\hat{A} + \hat{B} = 90°$, т. е. A и B — острые углы. **94.** Треугольник имеет максимальную площадь, если угол между двумя меньшими сторонами прямой. При $a = 2$, $b = 3$ величина третьей стороны отвечает условию $3 \leqslant c \leqslant 4$. Поэтому $S_{\max} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$. **95.** На рисунке 86 все части четырехугольника перенумерованы. $S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABC}$; $S_7 + S_8 = \frac{1}{2} S_{ACD}$; $S_1 + S_2 + S_7 + S_8 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$; $S_1 + S_2 + S_7 + S_8 = S_3 + S_4 + S_5 + S_6$. Поскольку $S_5 + S_6 = S_2 + S_3$, $S_3 + S_4 = S_5 + S_8$, $S_1 + S_7 = S_3 + S_5$. Таким образом, $S_{ABO} + S_{CTD} = S_{OMTK}$. **96.** Если $S_{ABK} = x$, $S_{TCD} = y$ (рис. 87), то $S_{ABCD} = 3(x + y)$, а $S_{AKCT} = 2(x + y)$; $S_{KMTP} = S_{KPT} + S_{KTM} = \frac{1}{2} S_{AKT} + \frac{1}{2} S_{KTC} = \frac{1}{2} S_{AKCT} = x + y = \frac{1}{3} S_{ABCD}$. **97.** На рисунке 88 части фигуры перенумерованы. $S_1 : S_4 = S_2 : S_3$; $S_4 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$. **98.** Условию отвечает центр треугольника и Окр $(A, |AB|)$, кроме точек B и C. **99.** Центр окружности O лежит на оси симметрии точек A и B. Из конгруэнтности треугольников OCM и ODK ($[CM]$ и $[DK]$ — касательные) следует, что $|OC| = |OD|$, т. е. центр окружности принадлежит оси симметрии точек C и D. Следовательно, центр окружности есть пересечение названных осей симметрии. Решений может быть 0, 1 или бесконечно много. **100.** Если $\widehat{OAC} = x$, то $\widehat{ACO} = x$, $\widehat{MOC} = x$, $\widehat{DOC} = 2x$, т. е. $\widehat{MOD} = 3x$, $\widehat{ODM} = 3x$; $\widehat{MDC} = \widehat{MCD} = 2x$ (рис. 89). Поэтому $x + 5x + 2x = 180°$. $x = 22°30'$, $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 45°$, $\hat{B} = 90°$. **101.** Зная длину стороны треугольника ABC $\left(|AB| = \frac{P}{3}\right)$,

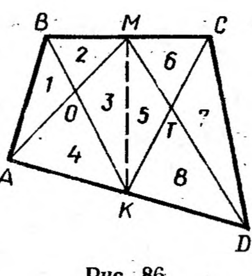


Рис. 86

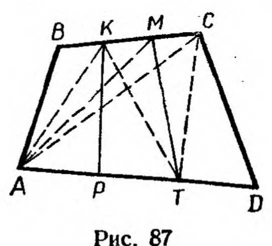


Рис. 87

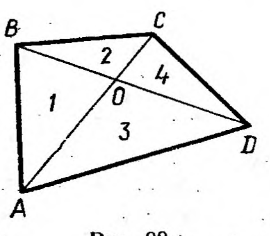


Рис. 88

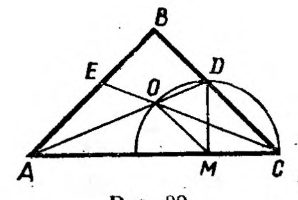


Рис. 89

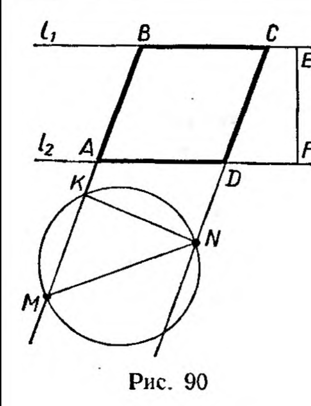


Рис. 90

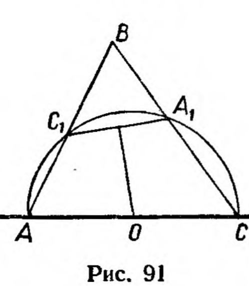


Рис. 91

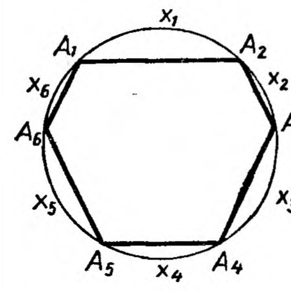


Рис. 92

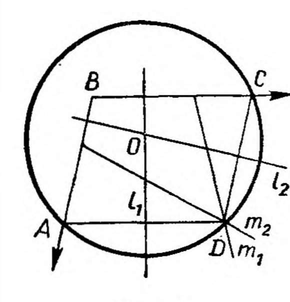


Рис. 93

строим $[AB]$ так, чтобы вершины A и B оказались на данных прямых, а затем завершаем построение равностороннего треугольника. После этого осуществим параллельный перенос треугольника ABC вдоль данных прямых, чтобы вершина C оказалась на данной окружности. Задача имеет решений 0, 2, 4, 6 или 8. **102.** Если $[BC] \in l_1$, $[AD] \in l_2$, $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, то высота ромба a известна — она равна расстоянию между данными прямыми (рис. 90). Построив прямоугольный треугольник KMN (с катетом a), определим прямую AB. **103.** Центр O окружности, проходящей через A, C, A_1, C_1, лежит на $[AC]$. Ось симметрии точек A_1 и C_1 проходит через точку O на данной прямой (рис. 91). Построив Окр $(O, |OA_1|)$, определим на данной прямой точки A и C. Вершина $B = (AC_1) \cap (CA_1)$. **104.** Обозначим, как на рис. 92, градусные величины дуг. По свойству дуг, заключенных между параллельными хордами, получим: $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$; $x_1 + x_6 = x_3 + x_4$. Отсюда $x_1 + x_2 = x_4 + x_5$. Значит, хорды A_3A_4 и A_1A_6 параллельны. **105.** Ось симметрии точек A и D — прямая l_1 проходит через центр окружности перпендикулярно к $[BC)$. Поэтому точка D принадлежит лучу $m_1 = S_{l_1}([BA))$. Ось симметрии точек C и D — прямая l_2 проходит через центр окружности перпендикулярно к $[BA)$. Поэтому точка D принадлежит лучу $m_2 = S_{l_2}([BC))$. $D = m_1 \cap m_2$ (рис. 93). **106.** Если n — четное число, то у каждого вектора среди данных есть противоположный. Поэтому сумма всех векторов есть нуль-вектор. Если n — нечетнсе число, то сумму можно записать так: $\vec{x} = \overrightarrow{OA}_1 + (\overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{OA}_n) + (\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_{n-1}) + \ldots$ По свойству диагонали ромба сумма в каждой скобке есть вектор, коллинеарный с $\overrightarrow{OA}_1$. Поэтому $\vec{x}$ и $\overrightarrow{OA}_1$ коллинеарны. Но ту же сумму можно записать и иначе: $\vec{x} = \overrightarrow{OA}_2 + (\overrightarrow{OA}_3 + \overrightarrow{OA}_1) + (\overrightarrow{OA}_4 + \overrightarrow{OA}_n) + \ldots$ В каждой скобке сумма — вектор, коллинеарный с $\overrightarrow{OA}_2$. Но если вектор коллинеарен с двумя пересекающимися векторами, то это нулевой вектор (рис. 94). Следовательно, при любом

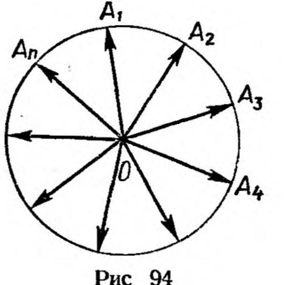


Рис 94

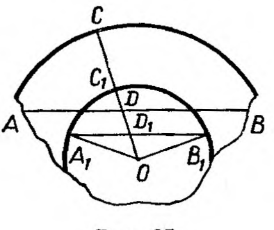


Рис. 95

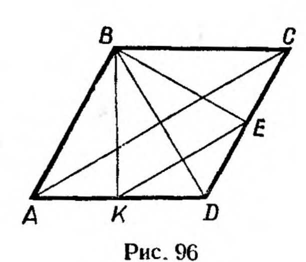


Рис. 96

n эта сумма $\vec{0}$. **107.** Построим окружность с центром O и радиусом в k раз меньше радиуса круга. Примем точку O за центр гомотетии. Радиус OC круга пересекает хорду AB в точке D. Этой точке гомотетична точка D_1. Проведя через D_1 прямую, параллельную $[AB]$, найдем точки A_1 и B_1, гомотетичные A и B. Искомый угол A_1OB_1 (рис. 95). **108.** Задача допускает не единственный вариант трактовки условия. 1) Пусть высоты проведены из вершины тупого угла (рис. 96). Если $|KE| = \frac{1}{2}|AC|$, то (с учетом параллельности $[AC]$ и $[KE]$) $[KE]$ — средняя линия треугольника ACD. Таким образом, K — середина $[AD]$, $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ и $\widehat{ABK} = 30°$. Величины углов — 60 и 120°. Если же $|KE| = \frac{1}{2}|BD|$, то используем подобие треугольников ABD и AKE: $|AK| : |AB| = |KE| : |BD| = 1 : 2$. Значит, $\widehat{BAD} = 30°$ и $\widehat{CBA} = 150°$. 2) Если высоты проведены из вершины острого угла (рис. 97), то $|PT| = \frac{1}{2}|AC|$. Из подобия треугольников APT и ABC имеем: $|AP| : |AB| = |PT| : |AC| = 1 : 2$. Следовательно, $\widehat{PBA} = 30°$. Величины углов ромба 30 и 150°. **109.** Величины углов ромба: 60 и 120°. С использованием подобия треугольников (рис. 98) последовательно получаем: $\frac{|MA|}{|AB|} = \frac{|MA|}{|BC|} = \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{|AD|}{|PB|} = \frac{|BD|}{|PB|}$. Так как

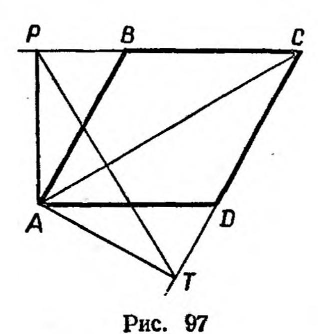


Рис. 97

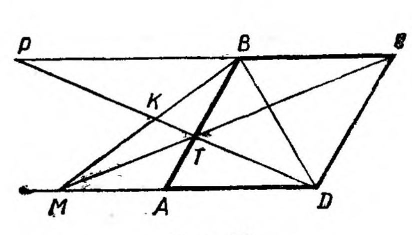
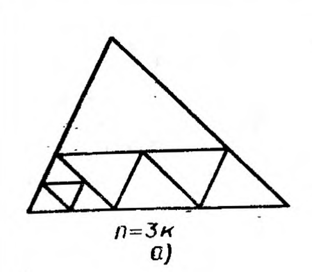
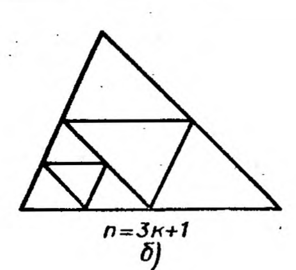


Рис. 98





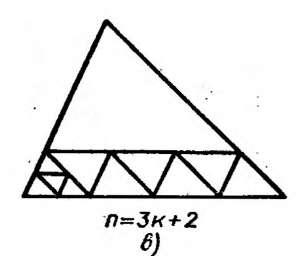


Рис. 99

$\widehat{MAB} = \widehat{PBD}$, то $\triangle MAB \sim \triangle PBD$ и $\widehat{P} = \widehat{MBA}$. Поэтому $\widehat{BKT} = \widehat{P} + \widehat{PBK} = \widehat{PBA} = 60°$. **110.** Проведение в треугольнике всех средних линий увеличивает число треугольников на 3, причем все получающиеся треугольники подобны исходному. На рисунке 99 показано, как получить $3k$, $3k+1$ и $3k+2$ треугольников, т. е. 4, 6, 7, 8, ... **111.** $c + H = \sqrt{c^2+2cH+H^2} = \sqrt{a^2+b^2+2ab+H^2} = \sqrt{(a+b)^2+H^2} > a+b$. **112.** Поскольку $\widehat{MBO}=\widehat{ABC}$ и $|BM|:|BC| = |BO|:|AB|$, $\triangle MBO \sim \triangle ABC$ (рис. 100). Значит, $|MO|:|AC| = |BM|:|BC| = |CT|:|AT|$, т. е. $|MO|=|CT|$. Аналогично доказывается, что $|MC|=|OT|$. Четырехугольник $OMCT$ — параллелограмм. **113.** $\hat{1}=\hat{2}=\hat{3}$. Поэтому $|MD|=|AD|$; $|MC| = \sqrt{65^2-63^2} = 16$ см. $|BM| = 49$ см (рис. 101). **114.** $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right):\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{2}\right) = 6:11$. Если периметр отсеченного треугольника $6x$, то длина гипотенузы $5x$, а сумма длин катетов $7x$. Таким образом, длины катетов $3x$ и $4x$, т. е. $a:b=3:4$. **115.** Пусть (рис. 102) $|AO| = x$, $|BO|=y$. Тогда $|DO| = y\sqrt{3}$, $|CO| = x\sqrt{3}$. Из треугольника COD: $3x^2+3y^2=300^2$. $x^2+y^2 = 30\,000$; $|AB|^2 = 30\,000$; $|AB|\approx 173$ м. Можно было заметить, что $\triangle COD$ подобен $\triangle AOB$ и коэффициент подобия $\sqrt{3}$. Поэтому $|AB| = \frac{300}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{3} \approx 173$ м. Возможен и

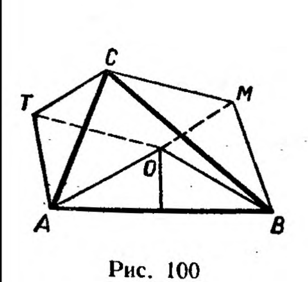


Рис. 100

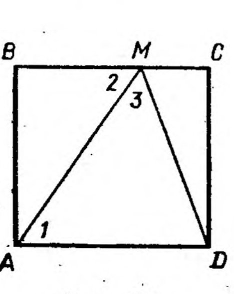


Рис. 101

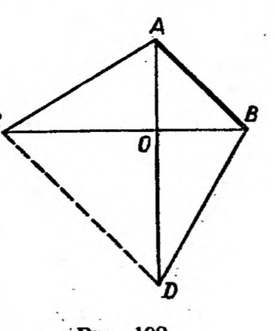


Рис. 102

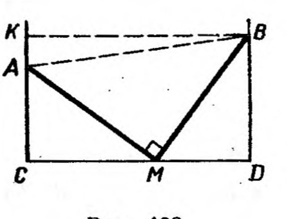


Рис. 103

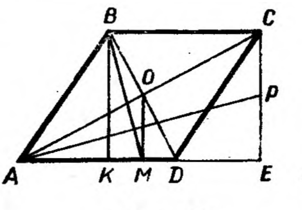


Рис. 104

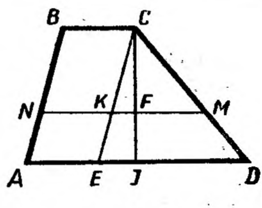


Рис. 105

иной подход. Точки A, B, C, D принадлежат одной окружности. $\breve{AB} = 60°$, $|AB| = a_6 = R$; $\breve{CD} = 120°$, $|CD| = a_3 = R\sqrt{3}$; $|AB| = \frac{300}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{3} \approx 173$ м. **116.** Поскольку углы AMC и DBM конгруэнтны, конгруэнтны и треугольники AMC и BDM (рис. 103). Поэтому $|CM|=|BD|=12$ м, $|MD|=|AC|=9$ м, $|CD| = 9+12=21$ м, $|MB| = \sqrt{9^2+12^2} = 15$ м. **117.** Проведем диагонали ромба и соединим центр O с точкой M (рис. 104). Легко показать, что $[OM]\perp[AE]$, $|BK| = 2|OM| = 2|PE|$, $|DE|=|AK|$. Поэтому $\frac{|PE|}{|AE|} = \frac{|OM|}{2|AM|} = \frac{|OM||DM|}{2|AM||MD|} = \frac{|MD|}{2|OM|} = \frac{|KM|}{|BK|}$. Значит, $\triangle APE \sim \triangle BKM$, $\widehat{PAE} = \widehat{KBM}$ и $[BM]\perp[AP]$. **118.** Так как треугольники BOC и AOD подобны, то их площади относятся как квадраты длин оснований. Поэтому длины оснований пропорциональны числам 2 и 3. Если обозначить $|BC|=2x$, то $|AD|=3x$ и высоты этих треугольников равны $\frac{2\cdot 20}{2x} = \frac{20}{x}$ и $\frac{30}{x}$ соответственно, а высота трапеции $\frac{50}{x}$. Площадь трапеции $\frac{2x+3x}{2}\cdot\frac{50}{x} = 125$ см². **119.** $|AO|^2:|OC|^2 = 50:20 = 5:2$. Но и $|AD|:|BC| = |AO|:|OC|$, поэтому $S_{ACD} = (50+20)\cdot\frac{5}{2} = 175$. Площадь трапеции $70+175=245$ см². **120.** Если O — середина $[BD]$, то ломаная AOC делит четырехугольник $ABCD$ на равновеликие части. Проведем $[OT]\parallel[AC]$, $T\in[CD]$. Из равновеликости треугольников AOC и ATC следует, что прямая AT отвечает условию задачи. **121.** Пусть $[MN]$ — искомый отрезок. Проведем $[CE]\parallel[AB]$ (рис. 105). Из подобия треугольников CMK и CDE следует, что их высоты относятся, как $(x-7):16$, где $x=|MN|$. Если высота трапеции h, то высота треугольника CMK равна $h\cdot\frac{x-7}{16}$. Имеем уравнение: $\frac{7+23}{2}\cdot h = 2\cdot\frac{7+x}{2}\cdot h\cdot\frac{x-7}{16}$. Отсюда $15 = \frac{x^2-49}{16}$, $x=17$ см. **122.** Перпендикуляры к сторонам треугольника, проведенные через середины этих сторон, пересекаются в центре O описанной окружности. Так как OA_0PB_0, OA_0MC_0 и OB_0KC_0 — параллелограммы (рис. 106), то $S_{KC_0MA_0PB_0} =$

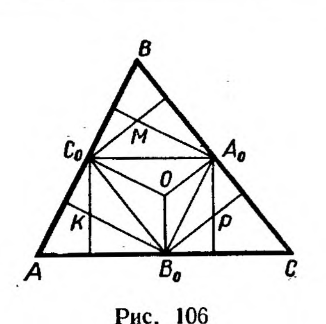


Рис. 106

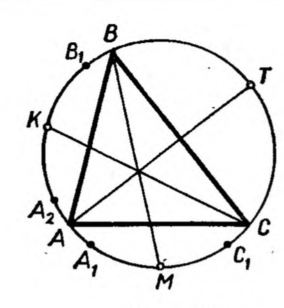


Рис. 107

$= 2S_{A_0B_0C_0} = 2 \cdot \frac{S}{4} = \frac{S}{2}$. **123.** К вершине наибольшего угла. **124.** Пусть $a < b < c$, тогда $c^3 = a^3 + b^3$; $a^2c + b^2c = c\,(a^2 + b^2)$; $c^2 < a^2 + b^2$. По теореме косинусов легко показать, что наибольший из углов C острый. **125.** Да. Длины его сторон пропорциональны числам 3, 4, 5. **126.** По данным точкам K, M, T можно построить окружность, описанную около треугольника ABC. Отметим вместо вершины A точку A_1 (наугад). По серединам дуг можно последовательно отметить точки C_1, B_1, A_2 (рис. 107). Если бы первая вершина была отмечена верно, то точки A_1 и A_2 совпали бы. Если они не совпадают, легко показать, что вершина A — середина дуги A_1A_2. Найдя A, просто определить положение вершин B и C. **127.** Построим $[MK] \perp [BC]$, $K \in [AB]$ (рис. 109). Тогда $\widehat{MOB} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 45° = \widehat{MKB}$. Следовательно, точки M, O, K, B принадлежат одной окружности. Так как $\widehat{KMB} = 90°$, то ее диаметр $[KB]$, поэтому ее центр принадлежит $[AB]$. **128.** Продлим медиану AD до пересечения в точке M с описанной окружностью (рис. 109). Так как $\widehat{M} = \widehat{C}$ и $\widehat{CAE} = \widehat{BAD}$, то $\widehat{ABM} = 90°$, т. е. $[AM]$ — диаметр окружности. Так как он делит пополам хорду BC, не будучи к ней перпендикулярным, то и $[BC]$ — диаметр. Поэтому $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{C} = 65°$, $\widehat{B} = 25°$. **129.** Если O —

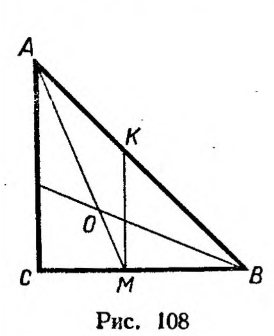


Рис. 108

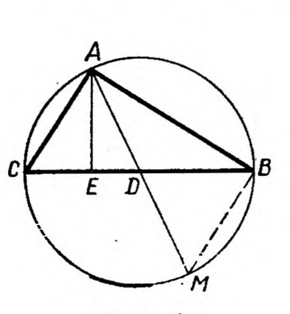


Рис. 109

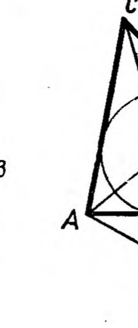


Рис. 110

центр вписанной окружности, а T — центр окружности, содержащей точки A, B, O, то $\widehat{AOT} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{ATO} = 90° - \widehat{ABO} = 180° - \widehat{AOC}$, т. е. $T \in (CO)$ (рис. 110). **130.** Углы этого треугольника (рис. 111) $\widehat{ABC} = 45°$, $\widehat{BAC} = 60°$. Так как $\widehat{ABE} = 30°$, то $|AE| = \frac{1}{2}|AB|$. $\triangle ABD$ равнобедренный прямоугольный, высота DM делит гипотенузу пополам. Следовательно, $|BM| = |AE|$. **131.** $S_{EHKT} = \frac{1}{2}|HT| \cdot |EK| \sin\alpha$. Но $\alpha = \widehat{A}$ (рис. 112). По условию $ah = 4 \cdot \frac{1}{2}h^2 \sin\alpha$; $a = 2h \sin\alpha$; $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$. Величины углов ромба 45° и 135°. **132.** Легко показать, что этот треугольник равнобедренный (рис. 113). Если $\widehat{BAO} = x$, то и $\widehat{MAD} = x$. Поскольку $|MA| = |MB|$, $\widehat{ABM} = \widehat{MAB} = 3x$. Из прямоугольного треугольника ABD имеем: $2x + 3x = 90°$. Величины углов треугольника 36, 36, 108°. **133.** $\triangle ABC$ равнобедренный (рис. 114). Если $\widehat{AMD} = x$, то $\widehat{MAD} = 90° - x$. Так как $[AM]$ — биссектриса угла KAC, то $\widehat{KAC} = 2(90° - x)$, $\widehat{BAC} = 2x$. Поэтому $\widehat{ABM} = 90° - 2x$, а $\widehat{AOM} = 2\,(90° - 2x) = 180° - 4x$. По симметрии углов AOM и AMO относительно $[AC]$ имеем: $x = 180° - 4x$; $x = 36°$. Величины углов треугольника: 72, 72 и 36°. **134.** Если найдется точка M многоугольника, не принадлежащая ни одному из названных кругов, то все стороны его видны из M под острыми углами. Так как сумма величин всех названных углов равна 360°, то этих углов не менее пяти. Для треугольника и четырехугольника такой точки не существует. **135.** Четырехугольники $ACMT$ и $BDMT$ — вписываемые в окружность, поэтому $\widehat{CTD} = \widehat{CTM} +$

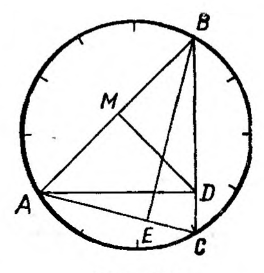


Рис. 111

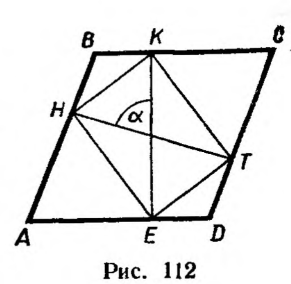


Рис. 112

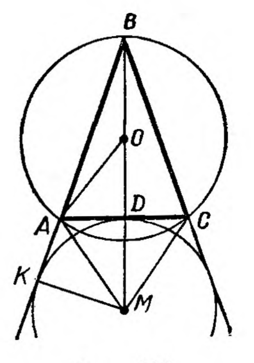


Рис. 113

Рис. 114

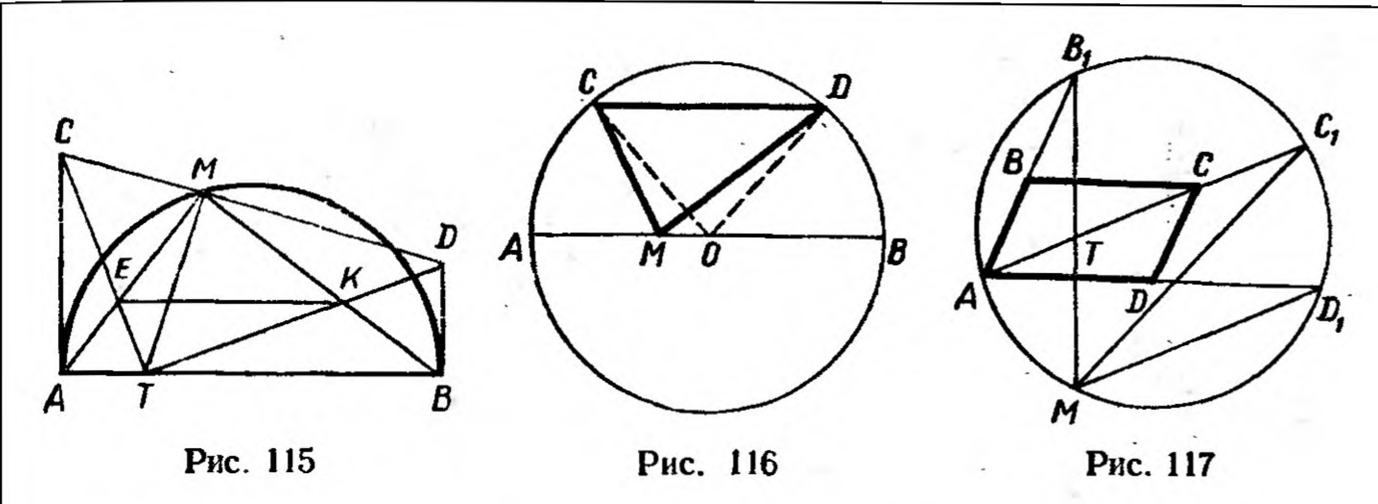


Рис. 115 Рис. 116 Рис. 117

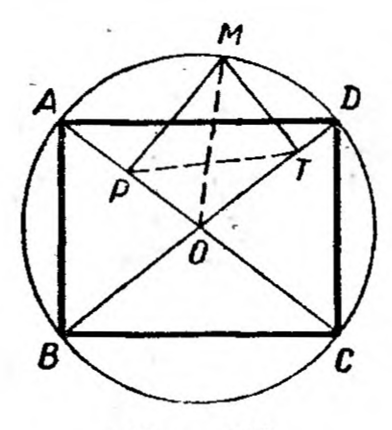


Рис. 118

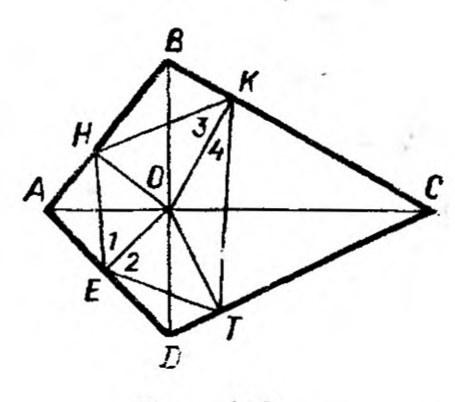


Рис. 119

$+ \widehat{DTM} = \widehat{CAM} + \widehat{DBM} = 90° - \widehat{MAT} + 90° - \widehat{MBT} = 180° - (\widehat{MAB} + \widehat{MBA}) = 180° - 90° = 90°$ (рис. 115). Следовательно, четырехугольник $ETKM$ вписываемый. $\widehat{EKT} = \widehat{EMT} = \widehat{BMD} = \widehat{BTD}$. Поэтому $[EK] \parallel [AB]$. **136.** Если $|OM| = a$, $|CO| = R$, $\widehat{COM} = \alpha$, то (рис. 116) $|CM|^2 + |DM|^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\alpha + a^2 + R^2 - 2aR\cos(180° - \alpha) = 2a^2 + 2R^2$. Таким образом, эта сумма не зависит от выбора точки C, но зависит от выбора точки M. **137.** Проведем хорду $[D_1M] \parallel [AC]$ (рис. 117). Обозначим $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \beta$, тогда $\widehat{AB_1M} = \beta$. Если $[B_1M] \cap [AC] = T$, то $\triangle AB_1T \sim \triangle ABC$. Поэтому $|AB| : |AT| = |AC| : |AB_1|$. $|AB| \cdot |AB_1| = |AC| \cdot |AT|$; $\triangle TC_1M \sim \triangle ACD$; $|AD| : |TC_1| = |AC| : |MC_1|$; $|AD| \cdot |MC_1| = |AC| \cdot |TC_1|$. Но $[MC_1] \cong [AD_1]$, так как эти хорды стягивают конгруэнтные дуги. Поэтому $|AB| \cdot |AB_1| + |AD| \cdot |AD_1| = |AC| \times |AT| + |AC| \cdot |TC_1| = |AC| \cdot |AC_1|$. Теорема остается верной и для случая, когда окружность пересекает стороны или диагональ параллелограмма или когда параллелограмм (кроме точки A) лежит вне данного круга. **138.** $\widehat{AOB} = 2\widehat{C}$; $\widehat{AO_1B} = 180° - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$. По условию $2\widehat{C} = 90° + \frac{\widehat{C}}{2}$, $\widehat{C} = 60°$, $\widehat{AOB} = 120°$.
139. В четырехугольнике $MPOT$ противоположные углы прямые, поэтому около него можно описать окружность. Диаметр окружности $[MO] \cong [AO]$, $\widehat{PMT} = \widehat{AOB}$, т. е. имеет постоянную величину, не зависящую от положения точки M. Следовательно, длина хорды PT не зависит от выбора точки M (рис. 118). **140.** Так как четырехугольники $AHOE$, $BKOH$, $CTOK$, $DEOT$ (рис. 119) вписанные, то $\widehat{1} = \widehat{OAH}$, $\widehat{2} = \widehat{ODT}$, $\widehat{3} = \widehat{HBO}$, $\widehat{4} = \widehat{TCO}$. Поэтому $\widehat{HET} + \widehat{HKT} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA} + \widehat{OCD} + \widehat{ODC} = 90° + 90° = 180°$. Значит, основания перпендикуляров принадлежат одной окружности. **141.** Пусть (KB) пересекает третью окружность в точке J, $\widehat{MAK} = x$, тогда (по свойству вписанного четырехугольника) $\widehat{TCM} = x$, $\widehat{MBJ} = x$, $\widehat{MCJ} = 180° - x$. Так как $\widehat{TCM} + \widehat{MCJ} = 180°$, то точки T, C, J принадлежат одной прямой. Значит, прямые KB и TC пересекаются на третьей окружности (рис. 120). **142.** Пусть окружности, описанные около треугольников AMD и MBC, пересекаются в точке P. Тогда $\widehat{APB} = \widehat{MPD} - \widehat{MPB} - APD = 180° - \widehat{BAT} - \widehat{MCB} - \widehat{AMC} = 180° - \widehat{BAT} - \widehat{ABT} = \widehat{T}$. Таким образом, точка P принадлежит и окружности, содержащей точки A, B, T. Аналогично показывают, что она принадлежит и окружности, содержащей точки C, D, T (рис. 121). **143.** Ось симметрии трапеции проходит через центр данной окружности параллельно биссектрисе угла между данными прямыми. Основание трапеции — хорда, которая содержит данную точку и перпендикулярна указанной оси. **144.** Воспользуемся рисунком 122. $|MA|^2 + |MC|^2 = |AC|^2 = 2a^2$; $|MB|^2 + |MD|^2 = |BD|^2 = 2a^2$; $|TA|^2 + |TC|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 + 4|TO|^2 = \frac{3}{2}a^2$; $|TB|^2 + |TD|^2 = \frac{1}{2}|BD|^2 + 4|TO|^2 = \frac{3}{2}a^2$. Величина отношения сумм рав-

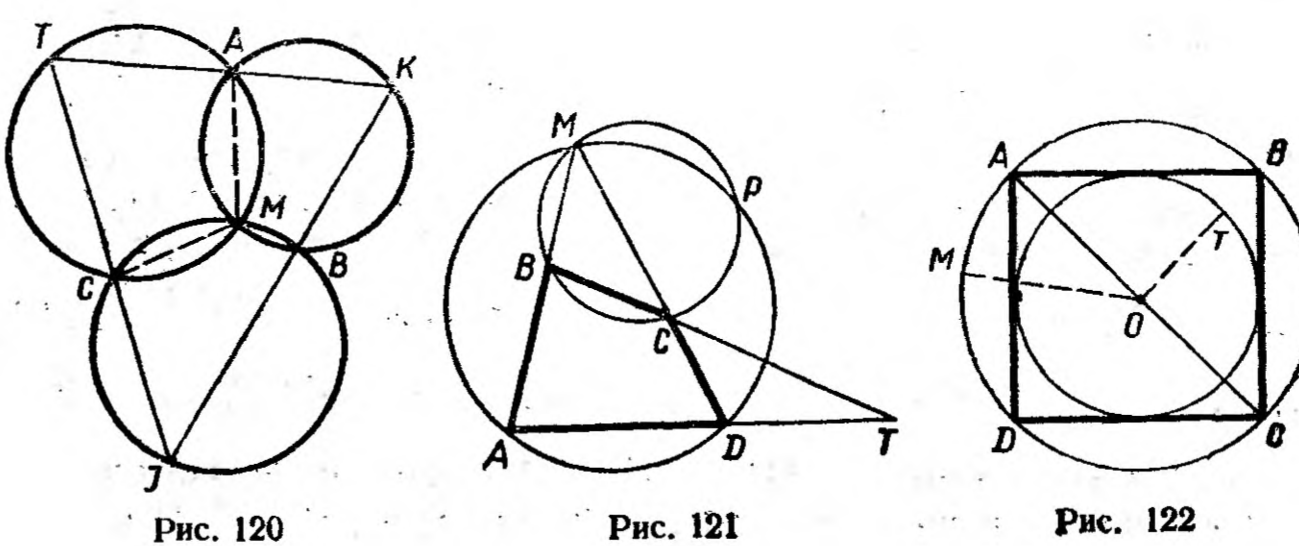


Рис. 120 Рис. 121 Рис. 122

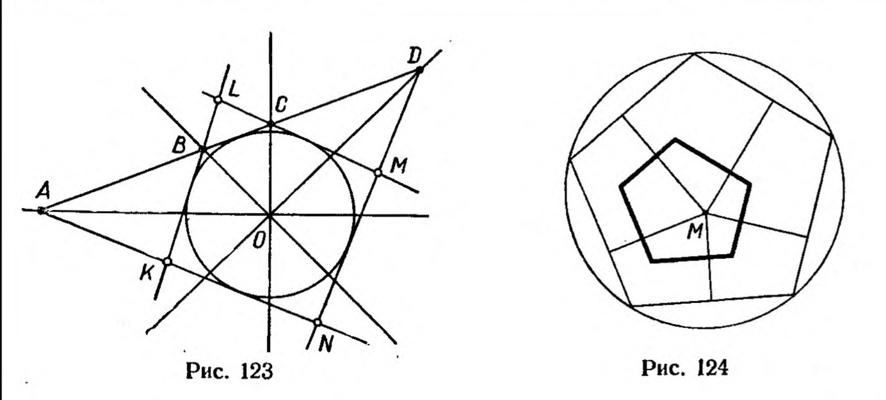


Рис. 123 Рис. 124

на $4a^2 : 3a^2 = 4 : 3$. **145.** Если $\widehat{BAO} = x$, то $\widehat{CBO} = 45° + x$ и $\widehat{CBK} = 2\,(45° + x) = 90° + 2x$; $\widehat{AKB} = 90° + 2x - 2x = 90°$. Аналогично доказывают, что все углы четырехугольника $ABCD$ прямые. Поскольку он описанный, то это квадрат (рис. 123). **146.** В 6 раз. **147.** Меньший из углов $\alpha < \frac{180° \cdot 5}{9} = 100°$, т. е. имеет величину 60° или 90°. Если $\alpha = 90°$, то $\beta = 162°$, т. е. количества сторон 4 и 20, а количества диагоналей 2 и 170. Величина отношения $2 : 170 = 1 : 85$. При $\alpha = 60°$, $\beta = 108°$. Число сторон 3 и 5, величина отношения числа диагоналей равна 0. **148.** Поместим данный многоугольник внутри одноименного правильного многоугольника, у которого стороны соответственно параллельны сторонам данного многоугольника (рис. 124). У точки M сумма расстояний от сторон правильного многоугольника при любом положении внутренней точки постоянна. Соединив точку M с вершинами и вычисляя площадь, обнаружим, что сумма расстояний до сторон (или их продолжений) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \frac{2S_1}{a} + \frac{2S_2}{a} + \frac{2S_3}{a} + \ldots + \frac{2S_n}{a} = \frac{2S}{a}$. У внутреннего многоугольника сумма расстояний от сторон до точки M меньше найденной на постоянную величину. Выбор точки M, оказывается, не имеет

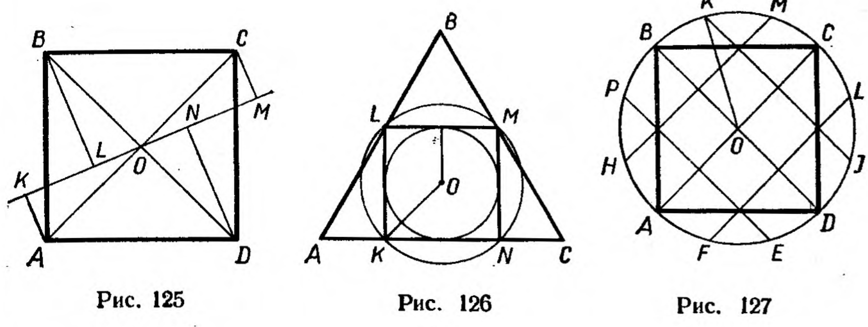


Рис. 125 Рис. 126 Рис. 127

значения (для всех внутренних точек и точек на сторонах сумма постоянна). **149.** Треугольники AOK, BOL, COM, DON конгруэнтны (рис. 125), поэтому $|AK|^2 + |BL|^2 + |CM|^2 + |DN|^2 = 2\,|AK|^2 + 2\,|BL|^2 = 2\,(|AK|^2 + |LO|^2) = 2\,|AO|^2 = a^2 = \frac{P^2}{16}$. **150.** Опишем около квадрата окружность и впишем в него окружность (рис. 126). Если длина стороны квадрата a, то радиусы этих окружностей $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a}{2}$. Первая окружность больше вписанной в треугольник, а вторая — меньше. $\frac{a}{\sqrt{2}} > r$; $a > r\sqrt{2}$; $\frac{a}{2} < r$; $a < 2r$; $r\sqrt{2} < a < 2r$. **151.** Да. **152.** По свойству средней линии треугольника устанавливается, что каждая из сторон двенадцатиугольника вдвое меньше стороны квадрата, а величина каждого внутреннего угла 150°. **153.** Радиус окружности OK вдвое больше расстояния хорды KJ от центра. Поэтому $\widehat{BOK} = 30°$ (рис. 127). Так устанавливается, что градусная величина дуг AH, AF, BP, PK, CM, CL, DJ, DE по 30°. Поэтому такие же величины имеют и четыре остальные дуги. Следовательно, перечисленные в условии точки действительно вершины правильного двенадцатиугольника. **154.** Диагонали A_1A_5 и A_2A_4 параллельны. Выполнив параллельный перенос стороны A_1A_2, получим (рис. 128) $\triangle BA_4A_5$. Легко показать, что он равносторонний и $|BA_5| = |A_1A_5| - |A_2A_4|$. **155.** Решение показано на рисунке 129. Одинаковыми цифрами показаны части одного равностороннего треугольника. **156.** а) Решение показано на рисунке 130. Заштрихованы треугольники, полученные отсечением от данных шестиугольников. б) На рисунке 131 показаны два решения. Кажется, что они равноценны, но второй способ дает вдвое меньшую длину разрезов. **157.** Разделим окружность с помощью циркуля на 6 конгруэнтных частей (т. е. найдем точки A, B, C, D, E, F). Одна из точек пересечения окружностей $(A, |AC|)$ и $(D, |AC|)$ есть K. Легко вычислить, что расстояние $|KO|$ равно длине стороны квадрата, вписанного в эту окружность, поэтому пересечение данной окружности с Окр $(A, |KO|)$ определяет две точки. Далее просто. **158.** У наибольшего из вписанных в шестиугольник правильных треугольников наибольший и радиус описанной окружности

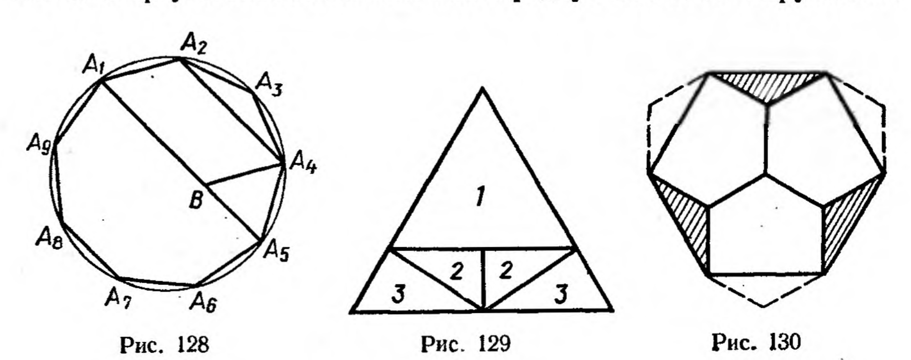


Рис. 128 Рис. 129 Рис. 130

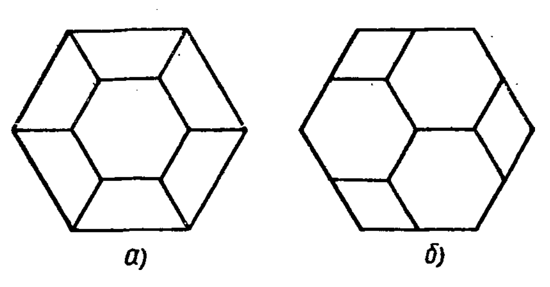


Рис. 131

$|OK|$, поэтому (рис. 132) наибольшие возможные правильные треугольники ACE и BDF. **159.** Пусть (рис. 133) прямая DM искомая. Если длина стороны шестиугольника a, то $S_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, $S_{MDF} = \frac{1}{4}S_6 - \frac{1}{6}S_6 = \frac{1}{12}S_6 = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$; $|DF| = a\sqrt{3}$. Следовательно, $|MF| = \frac{a}{4}$. По теореме Пифагора $|MD| = \frac{7a}{4}$. **160.** Если биссектрисы углов A, C, E попарно пересекаются в точках K, L, M, а биссектрисы углов B, D, F в точках N, O, P, то $\triangle KLM \cong \triangle NOP$. Поэтому $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}\left(S_6 - S_{\triangle KLM}\right) = \frac{1}{2}(S_6 - S_{\triangle NOP}) = S_{\triangle BDF}$. **161.** Не обязательно. **162.** 135°. Постройте треугольник ACD, симметричный треугольнику ABM относительно биссектрисы прямого угла треугольника ABC. **163.** Пусть (AC) и (AD) — координатные оси, длина стороны квадрата a. Тогда $A(0, 0)$, $B(0, a)$, $C(a, a)$. Если $M(x, y)$, то $x^2 + y^2 = 49$, $x^2 + (y-a)^2 = 169$, $(x-y)^2 + (y-a)^2 = 289$. Отсюда $a^2 - 2ay = 120$, $a^2 - 2ax = 120$, т. е. $x = y$, $M \in [AC]$. Длина диагонали квадрата $7 + 17 = 24$, его площадь 288. Возможны и другие решения. Обозначим $|AB| = x$, $\widehat{ABM} = \alpha$, $\widehat{MBC} = \beta$. Тогда по теореме косинусов, $\cos\alpha = \frac{x^2 + 13^2 - 7^2}{2 \cdot x \cdot 13} = \frac{x^2 + 120}{26x}$, $\cos\beta = \frac{13^2 + x^2 - 17^2}{2 \cdot 13 \cdot x} = \frac{x^2 - 120}{26x}$. Так как $\cos\beta = \cos\alpha(90° - \alpha) = \sin\alpha$, то сумма квадратов этих косинусов равна 1. Это приводит к уравнению $x^4 - 338x^2 + 14400 = 0$, из которого $x^2 = 50$ или 288. Первое значение не подходит, так как диагональ квадрата более 17. Если выполнить поворот на $-90°$ вокруг вершины B, то образом точки C окажется точка T, причем $|BT| = |BM| = 13$, $|TA| = 17$, $\widehat{MBT} = 90°$. Поэтому $|TM|^2 = 2 \cdot 13^2 = 338 = 17^2 + 7^2$. Следовательно, $\widehat{TAM} = 90°$, $[TM]$ — диаметр окружности, проходящей через точки A и B. Поэтому $\smile BM = 90°$, $\widehat{BAM} = 90° : 2 = 45°$. Следовательно, точка M принадлежит диагонали квадрата. Далее ясно. **164.** Пусть отрезок EK на $[CD]$ имеет длину a. При параллельном переносе его образ — $[PB]$. Так как $\widehat{AEP} = \widehat{AMB} = 90°$, то точка E определяется пересечением $[CD]$ с окружностью диаметра $[AP]$. Решений не более 2. **165.** Отметим на полуокружности точку T так, что $[TD] \parallel [AB]$. Тогда $|AT| = 15$, $|TD| = 7$. Если $[TO] \perp [AB]$, $|AO| = x$, то $|AB| = 2x + 7$. Поскольку $15^2 = x(2x + 7)$, $x = 9$ и $R = 12{,}5$ см. **166.** Точки D, E, F определяют описанную окружность, ее центр O, E — середина дуги AC. Поэтому $[BD] \parallel [EO]$, а (EO) и (BF) пересекаются в середине $[AC]$. **167.** Длины сторон — целые числа, наибольшее из них 8. Длины двух других сторон 7 и 5. Поэтому $S = 10\sqrt{3}$. **168.** Так как $a^2 > b^2 + c^2$, то $a^2 > 2bc$, $2a^2 > (b + c)^2$, $a\sqrt{2} > b + c$, $a(\sqrt{2} + 1) > P$. **169.** При повороте вокруг центра квадрата O на $-90°$ образом M является $T \in [AM]$. При этом $|TM| = a$, $|OM| = |OT|$, $\widehat{TOM} = 90°$, поэтому $|OM| = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **170.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Решение аналогично решению задачи 169 (поворот на $-120°$). **171.** Если два угла, прилегающие к одной стороне семиугольника, конгруэнтны, то конгруэнтные стороны есть. Если допустить, что углы по $120° - \widehat{A}$, $\widehat{C}$, $\widehat{E}$, то окажется, что $\widehat{BCG} = \widehat{DCF} = 60°$, т. е. $\widehat{C} = 120°$, что противоречит допущению. **172.** Если эти точки O_1, O_2, O_3, то $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle ABC$. Поэтому $|O_1B| = |O_1C| = |O_2A| = |O_2C| = |O_3A| = |O_3B| = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$. **173.** Поскольку $\widehat{AOB} = 135°$, величину гипотенузы можно найти по теореме косинусов: $AB = 5$ см. Так как площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5$, то радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности $r = \frac{2 \cdot 1{,}5}{5} = 0{,}6$. Поэтому длина искомой окружности $1{,}2\pi \approx 3{,}77$ см. **174.** Установим, что $P_n < P_{n+1}$. Пусть хорда AB — сторона правильного n-угольника. Разделим дугу AB на $n + 1$ конгруэнтных частей и соединим последовательно точки деления хордами. Все эти хорды

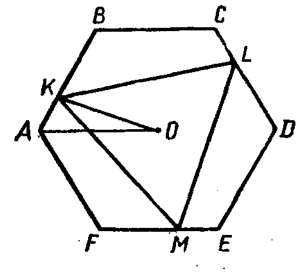


Рис. 132

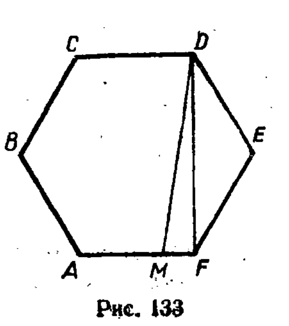


Рис. 133

конгруэнтны, а их проекции на отрезок AB возрастают от краев к середине. Хорда AC — сторона правильного $n+1$-угольника. Проекция ее на отрезок AB больше $\frac{n}{n+1}|AB|$. Поэтому $a_{n+1} > \frac{n}{n+1} a_n$; $(n+1) \cdot a_{n+1} > n \cdot a_n$; $P_{n+1} > P_n$. **175.** Из задачи 175 следует, что $S_{n+1} > S_n$. Поэтому площадь многоугольника с меньшим числом вершин не менее $S_3 = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3}$, а площадь многоугольника с большим числом вершин менее площади круга. Поэтому величина отношения площадей менее $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} < 2{,}5$.